



„IOSEPH PEANO

ARITHMETICES PRINCIPIA NOVA METHODO EXPOSITA”

în puține cuvinte și ceva mai „constructivist privită”

Această operă, al cărui titlu probabil amintește de „Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica”¹ domnului Isaac Newton - cel puțin în propria mea perspectivă - reprezintă un punct de inflexiune în re-formalizarea „conceptelor matematice”², oferind totodată o fundație solidă bazată pe un sistem axiomatic strict logic formalizat, în aceeași manieră în care principiile newtoniene au fundamentat – cu ceva timp în urmă - formalismele „fiziciste” ori acelea „fizicaliste”³.

1 Propusă de către domnul Isaac Newton, aprobată pentru publicare de către domnul Samuel Pepys – președinte al „Societății Regale” în 5 iulie 1686 și tipărită la Londra de către Joseph Streater, cu sprijinul abia menționatei „Societăți Regale” în anul 1687.

2 În principiu ori cel puțin în ancadramentele discursive familiare probabil doar mie însămi, termenul „matematicist” – ar putea reprezenta orice concept, care s-ar referi la ceea ce:

Domnul Aristotel clama: „Știința cantității”.

Domnul Isidore Auguste Marie François Xavier Comte sugera că ar reprezenta: „Science des grandeurs” - „Știința măsurării indirecte”, în accepțiuni contemporane

Domnul Benjamin Peirce: „Mathematics is the science that draws necessary conclusions” - Matematica este știința care trage concluziile necesare.

Domnul Bertrand Arthur William Russell: ... „all Mathematics is Symbolic Logic” - Toată matematica este logică simbolică.

Domnul Luitzen Egbertus Jan Brouwer: „The only possible foundation of mathematics must be sought in this construction under the obligation carefully to watch which constructions intuition allows and which not” - Singura fundație posibilă a matematicii trebuie căutată în această construcție, sub obligația de a observa cu atenție care construcții - intuitiv - sunt permise și care nu.

Domnul Arend Heyting ... „intuitionist mathematics is nothing more nor less than an investigation of the utmost limits which the intellect can attain in its self-unfolding - matematica intuiționistă nu este nici mai mult nici mai puțin decât o investigație a limitei limitelor e pe care intelectul le poate atinge în auto-dezvoltarea sa.

Ori pur și simplu – revenind la perspectiva domnului Russell: „The subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.” - Disciplina în care nu știm niciodată despre ce vorbim și nici dacă ceea ce spunem este adevărat.

Cel puțin conform celor sugerate în:

„A History of Mathematics”, lucrarea domnului Florian Cajori a cincea ediție din 1991, publicată de către „American Mathematical Society” – printre paginile 285 și 286

Primul volum al „Cours de philosophie positive, Troisième Leçon” – lucrarea domnului Isidore Auguste Marie François Xavier Comte, publicată la Paris, la „Rouen Frères”, în 1830.

„Linear associative algebra” lucrarea domnilor Benjamin Peirce și Charles Sanders Peirce publicată la New York, la „D. Van Nostrand”, în 1882 – la pagina 7

„The Principles of Mathematics”, lucrarea domnului Bertrand Russell, publicată în 1903 la „Cambridge at the University Press” – la pagina 5.

„Recent Work on the Principles of Mathematics” articolul domnului Bertrand Russell, publicat în „International Monthly”, volumul 4 din 1901.

„The Development of Intuitionistic Logic” articolul domnului Mark van Atten, publicat în 8 noiembrie 2017 în „The Stanford Encyclopedia of Philosophy” ediția din iarna anului 2017, editată de către domnul Edward N. Zalta, și publicată de către „Metaphysics Research Lab, Stanford University. Retrieved”.

3 Tot „în principiu” și - tot - „cel puțin în ancadramentele discursive familiare probabil doar mie însămi”, termenii:

a. „Fizicist” reprezintă un soi de abstractizare a accepțiilor „fizicește” calificabile.



Așa încât – cel puțin în acest context discursiv – s-ar putea accepta că, tocmai prin această lucrare, domnul Giuseppe Peano a re-construit fundamentele matematicii printr-o abordare – deși, probabil neintenționat - constructivistă, centrată pe axiome și demonstrații explicit recursive, mai degrabă decât pe intuiții ori revelații analogic fundamentate.

Doar că, pentru a aprecia pe deplin perspectiva domniei sale - probabil - în prealabil, ar trebui apreciate atât contextul intelectual al sfârșitului de secol XIX, cât și evoluția conceptului de număr - de la practicile empirice ale antichității la acceptarea lui „zero” ori a „infinitalui”, culminând cu formalizarea riguroasă a tuturor acestora, alături de operațiile în care ar putea fi implicate.

Așa încât – revenind:

Sfârșitul secolului al XIX-lea a fost marcat de o căutare intensă a rigorii în fundamentele matematicii, pe fondul progreselor în aritmetică, algebră, analiză și geometrie, care au evidențiat nevoia de a reconstrui concepte fundamentale precum numerele naturale pe baze mai solide decât cele intuitive, empirice ori „revelate”.

Iar, prin lucrările domnilor Gottfried Wilhelm Leibniz, în care domnia sa și-a propus propria perspectivă asupra unui limbaj universal⁴, George Boole care a „logicizat algebra” ori a „algebrizat

„Fizicismul” reprezintă generică calitate a unui sistem filosofic conceptual, pe care - spre exemplu - domnul Karl Raimund Popper l-a definit, prin analizarea spectrului intensional al „unei afirmații despre o proprietate fizică”, care, poate fi - cel puțin teoretic - „contrazisă” printr-o „observație”.

În timp ce – în ciuda faptului că, cel puțin aparent reprezintă aceleași soiuri de paradigme acceptive și tot un soi de concept filosofic,

b. „Fizicalismul” nu prezintă decât un soi de izomorfism expresiv cu „fizicismul”.

De fapt „fizicalismul” reprezintă perspectiva prin care s-ar presupune că nu există nimic - real - în afara „celor fizic definibile”.

Ori perspectiva conform căreia tot ceea ce chiar în acest moment există - inclusiv mințile umane - a apărut în virtutea re-aranjamentelor și a interacțiunilor dintre particulele și forțele fizice care au apărut după nașterea Universului.

Cel puțin conform celor sugerate în:

Articolul „physicism” găzduit pe platforma:

„<https://www.merriam-webster.com>, la adresa: „<https://www.merriam-webster.com/dictionary/physicism>”, desigur de către: „Merriam-Webster Dictionary.

Respectiv același - omonim - găzduit de: „Collins Online Dictionary”, la adresa: „<https://www.collinsdictionary.com/dictionary/english/physicism>” - desigur - pe platforma „<https://www.collinsdictionary.com>”

„Philosophy of Mind: A Very Short Introduction - Very Short Introductions” - lucrarea doamnei Barbara Gail Montero, publicată la „Oxford University Press” în 2022.

„Defining “Physicalism”” - articolul domnului Robert M. Francescotti, publicat în „The Journal of Mind and Behavior”, volumul 19, numărul 1 din iarna anului 1998, printre paginile 51 și 64.

Articolul domnului Andreas Elpidorou - „Introduction: The Character of Physicalism” - publicat în „Topoi”, volumul 37, printre paginile 435 și 455, din 2018.

Dar, asupra acestor detalii – cel puțin în acest context - nu voi reveni.

4 De fapt, domnul Leibniz a propus conceptul unui limbaj formal simbolic menit să exprime adevăruri matematice și logice într-un mod universal, precis și deductiv - „characteristica universalis”.



logica”⁵ - și ale lui Gottlob Frege, care a propus fundamentarea matematicii pe sistem logic bivalent, s-au promovat un soi abordări simbolice și formale a matematicilor.

În timp ce - desigur - prin contribuțiile domnilor lor, domnii Georg Cantor prin maniera în care a formalizat „teoria mulțimilor” și Richard Dedekind prin felul în care a definit numerelor reale au sugerat necesitatea eliminării tuturor „ambiguităților formalismelor matematiciste”.

Oricum – re-revenind - în societățile preistorice și antice, numărarea era o practică cât se poate de „practică”, motivată de nevoi concrete, precum gestionarea resurselor ori împărțirea timpului.

Spre exemplu, „Osul Ishango din Congo”⁶ prezintă creștături grupate, sugerând o formă timpurie de numărare.

În Mesopotamia în mileniul III înainte de Isus Hristos, babilonienii foloseau un sistem sexagesimal⁷ pentru calcule curente, reprezentând numerele naturale prin simboluri cuneiforme repetitive.

Așa încât, în lucrarea domniei sale „De Arte Combinatoria”, în 1666 a sugerat posibilitatea creării unui sistem simbolic care să permită combinarea conceptelor prin reguli logice, anticipând astfel formalismul modern „matematicist-contemporan”.

- 5 În matematică și în logica matematică, „algebra booleană” reprezintă o ramură a algebrei care diferă de algebra „consacrată”, în primul rând prin faptul că, valorile variabilelor sunt valorile de adevăr - adevărat și fals, de obicei notate cu 1 și 0 - în timp ce în algebra elementară valorile variabilelor sunt numere, iar în al doilea rând, algebra booleană folosește operatori logici precum conjuncția (Și), notată cu $\wedge$, disjuncția (SAU), notată cu $\vee$, și negația (NU), notată cu $\neg$. Algebra „clasică”, pe de altă parte, folosește operatori aritmetici precum adunarea, înmulțirea, scăderea și împărțirea.

Prin urmare, algebra booleană este o modalitate formală de a descrie operațiile logice în același mod în care algebra elementară descrie operațiile numerice.

Oricum – revenind - „Algebra booleană” a fost propusă de către domnul George Boole în lucrarea domniei sale „The Mathematical Analysis of Logic” – publicată în 1847 în Anglia. la Cambridge de către editura „Macmillan, Barclay, and Macmillan” și ulterior detaliată în „An Investigation of the Laws of Thought” în 1854 publicată la Londra, de „Walton and Maberly” și co-publicată la Cambridge de „Macmillan & Co”.

- 6 Cu o vechime de 20.000 de ani, a fost supranumit „cel mai vechi instrument matematic al omenirii”, cel puțin conform celor sugerate de către domnul Dirk Huylebrouck, în lucrarea domniei sale „Africa and Mathematics - From Colonial Findings Back to the Ishango Rods” – publicată în 2019 la „Springer Nature Switzerland AG” - în capitolul „Missing Link”, printre paginile 153 și 166.

Deși – de fapt - istoria uneltelor gravate e mult mai lungă, spre exemplu, „Osul de lup” din Cehia are 26.000 de ani, iar osul „Lebombo” din Africa de Sud depășește 40.000 de ani.

Dar, în acest context nu voi insista asupra acestui detaliu.

- 7 „În baza 60” adică, precum acela încă folosit - într-o formă modificată - pentru măsurarea timpului unghiuri lor și coordonatelor geografice.

Iar, cifrele cuneiforme foloseau zece ca sub-bază, în stilul unei notații „semn-valoare”, în care o cifră sexagesimală era compusă dintr-un grup de semne „înguste”, reprezentând unități de până la nouă și un grup de semne „late”, reprezentând până la cinci zeci. Iar, valoarea cifrei era reprezentată – pur și simplu – „aditiv”, adică de suma valorilor părților sale componente.

Unde, o abia menționată „notație semn-valoare” reprezintă numerele folosind o secvență de numerale, fiecare reprezentând o cantitate distinctă, indiferent de „poziția lor în secvența în care sunt reprezentate”.

Așa încât – deși desigur, convențiile ar fi putut fi diferite - poziția unui semn nu influența valoarea unui număr astfel reprezentat.



Egiptenii cu circa 2000 înainte de Isus Hristos utilizau deja un soi de sistem decimal, în care fiecare simbol era repetat de câte ori era necesar⁸, dar fără zero - conceptul de „nimic” ne-reprezentând altceva decât „nimic”.

Zero nu era recunoscut ca număr⁹.

Deși, tot babilonienii promovau deja un „simbol pentru absență”, ca pe un soi de precursor al lui 0 – de fapt foloseau un „marcaj” cu un „simbol” pentru „absența a ceva”. Doar că, nu putea fi folosit în calcule, întrucât nu concepeau „operații cu «nimic»”.

Și mai mult chiar era folosit doar ca simbol „median”, adică în mijlocul unei succesiuni de cifre diferite prin care trebuia să se reprezinte un număr. Precum spre exemplu, pentru a diferenția numere precum 201 și 21. Iar, în măsura în care existența sa putea fi dedusă din context, era pur și simplu, ignorat.

Apoi, în antichitatea greacă, pitagoreenii au atribuit numerelor naturale semnificații mistice, asociindu-le cu forme geometrice¹⁰. Numărarea era înțeleasă ca o succesiune implicit acceptată de elemente identice, iar infinitul era tratat precum ar reprezenta o „ciudățenie”, un concept care ar conduce la paradoxuri și contradicții - așa precum de altfel au și demonstrat prin „paradoxurile lui Zenon¹¹”.

8 Cu alte cuvinte „nepozițional” precum este actualmente cel tot – decimal – contemporan.

Deci – pur și simplu - aveau simboluri diferite pentru 1,10,100,1.000,10.000,100.000, „1 milion, sau multe” pe care le repetau succesiv, de câte ori era necesar.

9 Deși, cel puțin aparent, simbolul „nefer” simbolizând în principiu „bun”, „complet”, „frumos” mai era aparent folosit și în încă două posibile interpretări, întrucât într-un papirus în care se enumerau „cheltuielile de judecată”, datat cu aproximativ 1740 înainte de Hristos, acesta indica un „sold zero”.

Iar, atât într-un desen de pe „piramida din Meidum” cât și deopotrivă în alte situri de acest soi, tot „nefer” era folosit pentru a indica nivelul solului, înălțimea și adâncimile fiind măsurate „deasupra neferului” sau în măsura în care era cazul, „sub nefer”, în timp ce, conform celor sugerate de către domnul Carl Boyer, un act descoperit la Edfu conținea un concept privitor la ceea ce ar putea reprezenta zero, pentru a descrie geometric o anumită valoare a unei magnitudini.

Desigur, ambele perspective fiind cel puțin conforme cu cele sugerate de către domnul George Gheverghese Joseph, în lucrarea domniei sale „The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics” publicată la Princeton University Press în 2011.

10 De fapt, domnul Pitagora – cel puțin aparent – promova perspectiva prin care s-ar putea accepta faptul că, numerele în sine explicau adevărata natură a Universului.

În cultura greacă, în vremea lui Pitagora, numerele erau exclusiv „naturale” - adică numere întregi pozitive și lipsite de orice accept pentru vreun soi „zero”. Dar, spre deosebire de contemporanii lor, filosofii pitagoreici reprezentau numerele grafic, nu simbolic ori pur și simplu prin litere.

Așa încât, foloseau puncte, cunoscute și sub numele de „psiphi” - pietricele), pentru a reprezenta numerele în triunghiuri, pătrate, dreptunghiuri și pentagoane, ceea ce – cumva - le permitea o înțelegere vizuală a matematicii și permitea o explorare geometrică a relațiilor numerice.

11 „Paradoxurile lui Zenon” - din Elea, din secolul V de dinainte de Isus Hristos, discipol al lui Parmenide - sunt printre altele consacrate tocmai pentru modul în care pun sub semnul întrebării, atât posibilitatea existenței „mișcării”, „pluralității” cât și a „divizării întregilor în părți infinit de mici”.

Așa încât:

1. „Ahile și broasca țestoasă”:

Ahile, un alergător – rapid - se întrece cu o broască țestoasă - lentă. Pentru a-i oferi o șansă, Ahile îi dă țestoase un avans. Iar, domnul Zenon sugerează că Ahile nu va ajunge niciodată din urmă broasca țestoasă, întrucât acesta trebuie mai întâi să ajungă în punctul în care a plecat broasca țestoasă. Doar că, în acest timp, broasca țestoasă a parcurs deja o distanță mai mică. Pentru a acoperi această nouă distanță, Ahile trebuie să ajungă în noul punct, dar în acest timp broasca țestoasă a parcurs o altă distanță, chiar mai mică.



Și toate acestea în timp ce, în India, conceptul de „shunya” – vid - a apărut în texte vedice ca o posibilă perspectivă filosofică definibilă și domnul Aryabhata – cam cu 500 de ani după Isus Hristos - a promovat un sistem de numărare proto-„pozițional”, în care cifra zero ... încă nu avea un statut bine determinat¹².

Deși, într-un manuscris antic, scris pe scoarță de mesteacăn, descoperit în 1881 în satul Bakhshali, se poate remarca folosirea unui sistem de numere cu valori pozițional indicate, în care un punct desemna „zeroul”. Iar, acel punctul era numit shunya-sthāna „loc gol”. Cu toate că, tot același „simbol” era folosit și în expresiile algebrice pentru o variabilă necunoscută, cam cum s-ar folosi „x”-ul în algebra contemporană¹³.

Iar, „0” va apare ceva mai târziu, la aproximativ 628 de ani după Isus Hristos, când domnul Brahmagupta îl promovează în „Brāhmasphuṭasiddhānta”¹⁴ ca număr cu proprietăți aritmetice:

Și cum acest proces se repetă la infinit, împărțind distanța în segmente din ce în ce mai mici, domnul Zenon concluzionează că, de vreme ce există un număr infinit de puncte de parcurs, Ahile nu va ajunge niciodată din urmă broasca țestoasă.

2. „Dihotomia”:

Pentru a se ajunge la o destinație, trebuie mai întâi să se parcurgă jumătate din distanță, apoi trebuie să se parcurgă jumătate din distanța rămasă și tot așa mai departe, până la infinit.

Așa încât, oricât de mică ar fi distanța, întotdeauna poate fi împărțită în două părți – eventual egale. Iar, pentru a putea fi parcursă, trebuie să parcurgă un număr infinit de „parți”, ceea ce ar fi imposibil într-un interval de timp - finit. Și astfel, „mișcarea” este o iluzie.

3. „Săgeata”

Orice săgeată aflată în zbor este, în orice moment dat, într-o stare „statică”.

Așa încât, domnul Zenon a sugerat că timpul este compus dintr-o serie de momente discrete, „înghețate” – ori cuate cuvinte, dintr-o succesiune de „staze”.

Și cum într-un anumit moment, o săgeată aflată în zbor ocupă un spațiu egal cu ea însăși, s-ar putea acceta faptul că, de fapt „stă”. Iar, cum acest fapt este valabil pentru fiecare moment din zborul acesteia, „săgeata trebuie să stea pe toată durata evoluției sale”.

Doar că, de fapt, seria infinită de „jumătăți” de distanță – precum ar fi: „ $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ și așa mai departe” - este o serie convergentă, a cărei sumă este egală cu 1. Întrucât - ceea ce probabil doar în proprie-mi perspectivă ar fi putut și domnul Zenon să-și fi imaginat - dacă un pătrat este pur și simplu tăiat succesiv în 2 jumătăți, iar apoi una dintre acestea este tăiată în alte 2 jumătăți, iar apoi una dintre acestea este tăiată în alte 2 jumătăți, chiar dacă s-ar împărții acel pătrat în „infinit de multe jumătăți”, acestea dacă ar fi reunite tot un pătrat ar forma.

Și mai mult chiar, orice formă geometrică indiferent în câte părți ar fi împărțită, tot aceeași formă va reprezenta, prin re-unirea acestora.

Și astfel, „orice sumă infinită de termeni care ar putea reprezenta chiar și o valoare infinit de mică” poate avea o „valoare finită”, ceea ce conduce la infirmarea tuturor celor astfel sugerate de către domnul Zenon.

Dar, asupra altor detalii asociate acestor soiuri de paradigme acceptive, în acest context, nu voi insista.

- 12 În 499 domnul, Aryabhata a conceput un sistem de numere poziționale, folosind consoane sanscrite pentru numere mici și vocale pentru puterile lui 10.

Așa încât, folosind acest sistem, numerele de până la un miliard puteau fi exprimate folosind fraze scurte, dar care, întrucât producea fraze destul de ... impronunțabile, a fost abandonat, deși aparent principiul sistemului de numere poziționale i-a inspirat pe post-cursorii domniei sale.

- 13 Cel puțin conform celor sugerate în „Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers” de către domnul Karl Augustus Bröner – în lucrarea domniei sale, publicată la M.I.T. Press, în 1969.

- 14 Una dintre lucrările domniei sale în care, printre altele, instituie reguli pentru manipularea numerelor negative și pozitive, alături de o metodă de calculare a rădăcinilor pătrate și mai multe metode de rezolvare a ecuațiilor liniare ori pătratice plus câteva reguli pentru însumarea seriilor alături de „identități” și câteva „teoreme”.



Spre exemplu – în acest abia menționat context discursiv – domnia sa menționează că suma unui număr pozitiv și a unui număr negativ este diferența lor iar, dacă sunt egale, zero și totodată că, scăderea unui număr negativ este echivalentă cu adunarea unui număr pozitiv ori că, că produsul a două numere negative este pozitiv.

Doar că, unele dintre propunerile privitoare la fracții diferă de acelea agreate prin sistematizarea modernă al numerelor raționale .

Spre exemplu, prin reglementările propuse de către domnia sa, s-ar putea accepta, că:

Un număr pozitiv sau negativ, împărțit la zero, este o fracție cu zero ca numitor.

Zero împărțit la un număr negativ sau pozitiv este fie zero, fie este exprimat ca o fracție cu zero ca numărător și cantitatea finită ca numitor.

Zero împărțit la zero este zero.¹⁵

Totuși, în secolul al XII-lea, domnul Bhāskara al II-lea, în Līlāvātī – tratatul domniei sale despre matematică a sugerat - că, împărțirea la zero ar trebui să aibă ca rezultat o cantitate infinită.

O cantitate împărțită la zero devine o fracție al cărei numitor este zero.

Această fracție se numește cantitate infinită.

În această cantitate constând din ceea ce are zero ca divizor, nu există nicio modificare, deși multe pot fi adăugate sau extrase; așa cum nicio schimbare nu are loc în Dumnezeu infinit și imutabil atunci când lumi sunt create sau distruse, deși numeroase ordine de ființe sunt absorbite sau scoase la iveală¹⁶.

Oricum – revenind - aceste idei au fost preluate în cultura arabă prin matematicieni precum domnul Al-Khwarizmi – la aproximativ 825 de anii după Isus Hristos¹⁷ - care a adoptat „sifr”¹⁸ - zero - din sistemul de numerație indian.

Precum – spre exemplu - „Identitatea lui Brahmagupta”, prin care, domnia sa sugera că, spune că, dat fiind n, produsul a două numere de forma a^2+nb^2 este el însuși un număr de aceea formă, adică:

$$(a^2+nb^2)(c^2+nd^2)=(ac-nbd)^2+n(ad+bc)^2$$

Respectiv „Teorema lui Brahmagupta”, prin care se afirmă că, dacă un patrulater înscris într-un cerc are diagonale perpendiculare, atunci perpendiculara pe o latură din punctul de intersecție al diagonalelor întotdeauna va împărți în exact două părți egale, latura opusă.

Dar, asupra acestor detalii, nu voi insista.

15 Conform, cel puțin celor sugerate în „The Nothing that Is: A Natural History of Zero”, lucrarea domnului Robert Kaplan, publicată la Oxford University Press, în 1999 – printre paginile 68 și 75.

16 Confirm cel puțin celor sugerate de către domnul Rahul Roy, în articolul domniei sale „Babylonian Pythagoras' theorem, the early history of zero and a polemic on the study of the history of science”. Publicat în „Reson” în volumul 8, printre paginile 30 și 40, în 2003.

17 Cel puțin conform celor sugerate în „Al-Khwarizmi: the inventor of algebra”, lucrarea domnului Corona Brezina, publicată la „New York - Rosen Pub. Group” în 2006.

18 În perioada pre-islamică, cuvântul „sifr” - arabă صفر - avea sensul de „gol”. Dar, a evoluat pentru a însemna zero, atunci când a fost folosit pentru a traduce ceea ce în sanscrită reprezenta „vid” śūnya - शून्य .

Cel puțin conform celor sugerate în „Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution: Showing the Operations, Expenditures, and Condition of the Institution”, publicat de „Smithsonian Institution - U.S. Government Printing Office”, în 1903, la pagina 518.



Iar, în Europa¹⁹, domnul Fibonacci la 1202 ani după Isus Hristos a promovat zero și sistemul decimal prin „Liber Abaci”²⁰, doar că, numerele naturale rămâneau definite intuitiv, ca numere „numărabile”: 1, 2, 3 și așa mai departe.

Și mai mult chiar, în ceea ce privește „infinitul”, acesta a fost descris cu precădere în contexte „teologice” - spre exemplu, domnul Al-Ghazali îl promova ca pe un soi de „potențial divin” – în timp ce, în acelea „matematiciste” a rămas doar vag descris.

Pentru ca, începând din secolele XVI-XVIII, matematicienii - precum domnii Descartes și Newton - să integreze numerele naturale atât în algebră cât și în calcule infinitezimale, deși definițiile lor rămâneau – încă - „intuitive”.

Și deși - între timp - existența lui „0” fusese pe deplin acceptată, acesta nu era încă considerat: „număr natural cu drepturi depline”. Iar „infinitul” apărea în descrierea unor „serii” și a unor „limite”, dar fără a beneficia de o teorie formală, care să-i sustenteze existența ori proprietățile.

Iar – în cele din urmă - în secolul XIX, în 1861, domnul Hermann Grassmann - în lucrarea domniei sale „Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten”²¹, în 1861 - a propus o definiție recursivă a numerelor, generate prin adăugare succesivă de „unități”, domnul Richard Dedekind - în 1888 în lucrarea domniei sale „Was sind und was sollen die Zahlen?”²² - le-a definit ca și cum ar alcătui un sistem ordonat, prin care, pornindu-se de la „1” și aplicându-se un „succesor”, inductiv s-ar putea ajunge până la „infinit”, iar domnul Gottlob Frege le-a abordat logic, definind **N** ca clasa mulțimilor cu **n** elemente. Doar că, această definiție era complexă și depindea de o „teorie mulțimilor”.

Apoi, domnul Georg Cantor a revoluționat toate acestea propunând o „teorie a mulțimilor” în care erau acceptate cardinalități infinite de mari – cel puțin - pentru „mulțimile numerelor” de orice soi²³.

Deci - în acest ancadrament acceptiv - domnul Giuseppe Peano a propus în 1889 „Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita” – cu alte cuvinte, „Principiile aritmeticii

19 Cel puțin conform celor sugerate în „The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer”, lucrarea domnului Georges Ifrah, publicată la „John Wiley & Sons Inc” în 2000.

20 Din latină „Cartea Calculului”, reprezintă o lucrare despre matematică - scrisă în latină, desigur – de către domnul Leonardo de Pisa, cunoscut postum drept „Fibonacci”.

21 Publicată inițial la Berlin, la „Verlag von T. C. F. Enslin - Adolph Enslin”

22 Publicată inițial la Braunschweig, în Germania la „Friedrich Vieweg und Sohn”.

23 De fapt, domnul Georg Cantor a revoluționat – probabil - toată matematica prin dezvoltarea teoriei mulțimilor, în special prin lucrarea domniei sale „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre” - publicată în 1883 la Leipzig, de „B.G. Teubner” - în care a propus conceptul de cardinalitate – de număr al elementelor - pentru mulțimi infinite și demonstrând că există diferite tipuri de infinit. Spre exemplu, cardinalitatea mulțimii numerelor naturale – deși infinită - fiind strict mai mică decât cardinalitatea numerelor reale – „infinit mai mare” decât aceea a numerelor naturale.



prezentate într-o nouă metodă” - astfel propunând pentru aritmetică ceea ce cu mult timp mai înainte, domnul Euclid prin „Elementele”²⁴ domniei sale oferise geometriei: un sistem axiomatic concis, capabil să susțină întreaga construcție a numerelor naturale.

Și oricum, importanța lucrării domniei sale nu o constituie doar propriile-i axiome prin care fondează mulțimea abia menționatei numere ori definirea funcției „succesor” și unicitatea rezultatului acesteia sau faptul că **1** – deși în unele sisteme moderne se începe de la **0** - nu este succesorul nici unui număr ci – nicidecum în cele din urmă - „principiul inducției”.

Iar, elementul de noutate care o definește nu rezidă doar în conținut, ci tocmai în forma acesteia, sustentată de un simbolism logic sistematic, articulat într-o limbă latina deliberat de-„persona-

24 „Elementele - în original: Στοιχεῖα, Stoiicheia - lui Euclid” reprezintă una dintre cele mai influente și cele mai importante cărți din istoria matematicii și a științei, un tratat matematic compus din 13 cărți, propus desigur, de către domnul Euclid din Alexandria, cu aproximativ 300 de ani înainte de Isus Hristos.

Iar, opera domniei sale a servit drept principalul manual de geometrie și logică pentru mai bine de 2000 de ani, a fost una dintre cele mai vechi lucrări matematice tipărite după inventarea tiparului.

Și s-a estimat a fi a fost a doua după Biblie, în ceea ce privește numărul de ediții publicate de la prima tipărire din 1482 – cel puțin așa precum au sugerat doamna Uta B. Merzbach și domnul Carl B. Boyer, în capitolul „5: Euclid of Alexandria”, în lucrarea domniilor lor „A History of Mathematics”, în a treia ediție publicată la „John Wiley & Sons”, în 2010, printre paginile 90 și 108.



lizată”²⁵, domnia sa astfel dorind să elimine ambiguitățile și să facă cat mai „formalizabile” formalele logice.

Așa încât, în acest context, lucrarea domniei sale a devenit punctul de plecare al perspective-
lor care – ulterior - îi vor transcende propriile-i propuneri:

„Logicismul” – propus de către domnii Frege, apoi Bertrand Arthur William Russell și Alfred North Whitehead presupunea reducerea aritmeticii la logică pură.

Iar, pentru acesta „axiomele peanoiene, formulate într-un limbaj – cat se poate de - logic, au furnizat atât material de re-construcție a conținutului minimal al aritmeticii, cât și instrumentul notațional fără de care toate acestea ar fi evoluat într-o manieră probabil mai puțin formală.

„Formalismul” – propus prin perspectiva domnului David Hilbert, în care matematica reprezenta – cumva - un ansamblu de „jocuri cu semne” guvernate de axiome și reguli, în care problemele consistenței sistemice devin fundamentale.

25 „Latino sine flexione” - sau „Interlingua de Academia pro Interlingua” - reprezintă un proiect sistematic prin care s-a dorit crearea a ceea ce de fapt s-a dorit a reprezenta „un limbaj științific universal”, conceput sub coordonarea domnului Peano, între anii 1887 și 1914.

De fapt, în articolul „De Latino Sine Flexione, Lingua Auxiliare Internationale” - publicat în 1903 în Revue de Mathématiques în „Tomo VIII, pp. 74-83”, publicat la „Fratres Bocca Editores: Torino” - domnul Peano fundamentează această perspectivă sustentând-o pe observațiile domnului Leibniz privind posibilitatea simplificării limbii latine și – în acest context - dezvoltând conceptul într-un sistem coerent și aplicabil.

Și – în acest context - în 1908, domnia sa devine membru și director al „Akademi internasional de lingu universal” - care se transformă în 1909 în „Academia pro Interlingua” – instituție care devine platforma prin care se dezvoltă și se standardizează acest soi de formalism lingvistic, prin intermediul publicației oficiale „Discussiones” – publicată între anii 1909 și 1913.

Așa încât, principale particularități ale „Latino sine flexione” erau reprezentate, de:

Lipsa flexiunilor gramaticale - cuvintele nu își schimbau terminațiile în funcție de caz, număr sau funcția gramaticală

Ordinea fixă a cuvintelor - de obicei subiect-predicat-complement direct, similar limbilor romanice moderne
Vocabular simplificat – întrucât folosea rădăcini latine dar elimina formele neregulate

Absența genului gramatical – prin renunțarea la sistemul complex de definire a genurilor din „latina clasică”
Conjugare minimă - verbele aveau forme foarte simple și regulate

Spre exemplu, în loc de posibilitatea de a se propune în clasică manieră latinească:

„Malum pulchrum est”

În care „malum” reprezintă cazul nominativ neutru, iar „pulchrum” se acordă în gen neutru cu acesta, și „est” este forma conjugată a verbului „a fi”, „Latino sine flexione”-ian s-ar putea – pur și simplu - propune:

„Malo es pulchra.”

Așa încât, „malo” rămâne neschimbat - „fără flexiune de caz”, „es” este forma simplificată, neconjugată a verbului „a fi”, în timp ce, „pulchra” rămâne în forma de bază, fără „acordul de gen”.

Iar, domnul Peano credea că acest soi de simplificări ar face latina accesibilă ca limbă internațională modernă, păstrând în același timp moștenirea ei academică și științifică.

Oricum, deși această perspectivă a suscitat un oarecare interes academic - și nu numai că a fost chiar folosită în publicații matematice pentru o vreme și conjunctural, s-au propus și versiuni alternative – dar, în cele din urmă, nu a reușit să fie – pe deplin - adoptată.



Așa încât, aritmetica peaniană „funcționează” în acest context ca exemplul canonic de sistem deductiv finit, asupra căruia poate fi aplicat orice sistem meta-matematicist.

„Intuiționismul” inițiat de către domnul Luitzen Egbertus Jan Brouwer prin care domnia sa contestă legitimitatea „principiului terțului exclus”²⁶ și a „existențelor neconstructive”, dar care își definește poziția printr-un soi de dialog paradigmatic peano sustenabil, chiar și când respinge unele metode clasice, întrucât – tot - acceptă nucleul constructiv al aritmeticii finite, bazat pe inducție și recursii primitive.

Ulterior, formalizarea logicii și aritmeticii intuiționiste promovată de către domnul Arend Heyting oferă o contra-perspectivă celei peanoiene, dar una care rămâne calibrată pe aceeași paradigmă mai mult ori mai puțin formal deja propusă de către domnul Peano.

26 Principiul terțului exclus - „Principium tertii exclusi” ori „Legea mijlocului exclus” este unul dintre principiile fundamentale ale logicii clasice, astfel „formulabil”:

„Pentru orice propoziție **P**, este adevărată fie **P**, fie negația sa $\neg P$. Nu există o a treia posibilitate. «Tertium non datur”, cu alte cuvinte, cale de mijloc nu există”.

Ori într-o notație - ceva - mai contemporană: $P \vee \neg P$

Deci: „Doar **P** sau **non-P** este întotdeauna adevărată”.

Precum, spre exemplu:

„Numărul 2 este par sau nu este par.”

„Ploua sau nu plouă.”

Oricum – revenind - în logica peanoiană principiul este implicit acceptat în sistemul său axiomatic, doar că, „constructiviștii” îl resping și consideră că o propoziție este adevărată doar dacă poate fi - cumva - „construită”.

Iar, logicienii „intuiționiștii constructiviști” – precum domnii Brouwer ori Arend Heyting repudiază explicit acest principiu.

Oricum, diferența esențială dintre logica constructivistă și cea intuiționistă științifică, stă tocmai în felul în care fiecare privește și definește adevărul matematic și existența obiectelor – matematice, în acest caz.

Constructiviștii susțin că pentru a demonstra existența unui obiect matematic, trebuie să se construiască efectiv acel obiect sau să se furnizeze o metodă concretă pentru a-l construi. Și nu e suficient doar să se demonstreze că o contradicție ar apărea dacă acel obiect nu ar exista. Așa încât, resping legea terțului exclus – adică faptul că o propoziție este fie adevărată, fie falsă - argumentând că, pentru o propoziție, este posibil să nu avem nici o demonstrație a adevărului, nici o demonstrație a falsității sale.

Intuiționiștii - într-o perspectiva oarecum sinoptică - promovează formă specifică de logică constructivistă, susținând că obiectele matematice există doar ca produse ale minții umane. Așa încât, un obiect matematic nu are o existență independentă de mintea creatorului său. Iar, adevărul unei propoziții matematice este stabilit prin fie prin „evidența sa” mentală, fie printr-o demonstrație.

Așa încât, „intuiționismul” este o ramură a constructivismului.

Și fiecare intuiționist este un constructivist, dar nu fiecare constructivist este un intuiționist.

Principală diferență constând în faptul că, în timp ce constructiviștii se concentrează pe necesitatea unei construcții explicite, intuiționiștii se bazează pe activitatea mentală - sau pe intuiție - ca sursă finală a realității matematice.

Spre exemplu, unii „constructiviști” pot accepta principiul ori legea terțului exclus - în anumite contexte - în timp ce absolut toți „intuiționiștii” le resping categoric.



Prin urmare, „Arithmetices Principia” nu reprezintă doar o „listă de axiome”, ci un etalon metodologic care catalizează trei răspunsuri majore – divergente - la aceeași întrebare despre temeiul adevărului matematic: reducere logică, închidere formală, reconstrucție constructivă.

Iar, în toate cele trei – abia sugerate - contexte, aritmetica peanoiană este fie punct de plecare – precum pentru „logicism sau formalism” fie referința critică – precum pentru „constructivism” ori pentru „intuiționism”.

Oricum – revenind - „Aritmetica Peano” reprezintă – probabil doar „în primul rând” - un sistem axiomatic dezvoltat pentru construirea numerelor naturale

Și deși domnia sa probabil nicidecum nu a intenționat, chiar în cea mai perspectivă „constructivistă” – totuși - acest soi de paradigmă „aritmeticistă” reprezintă un soi de „construcție” întrucât – indiferent din ce perspectivă ar fi privită - se bazează pe „pași” expliți și recursiv promovați.

De fapt, un soi de „re-construcție”. Întrucât cel puțin în proprie-mi perspectivă domnia sa a „fundat o construcție deja construită”. Dar, asupra acestui detaliu, în acest context, nu voi insista. Ci voi reveni într-un ancadrament dedicat.

De fapt – revenind - în perspective constructiviste, inductiv privind, „nici o proprietate nu există cu adevărat «până la infinit»”, ci doar pentru orice element – precum „**k**” spre exemplu – pentru care „oricând se poate construi o dovadă pentru **P(k)** prin aplicări finite ale pasului inductiv.

Și mai mult chiar, deși în accepțiuni „matematicist clasice” se folosesc principii non-constructive - precum spre exemplu: „ori **P**, ori **nu P**”, iar constructivist privind, așa ceva nu prea este posibil, prin Aritmetica Peano – probabil exclusiv în perspectivă constructivistă - pornind de la **1**, se oferă o fundație solidă pentru „orice s-ar putea reprezenta prin matematică”.

Așa încât, în acest context, am privit perspectivele peanoiene printr-o perspectivă „constructivistă”, prin care numerele sunt prezentate ca și cum ar fi fiind construite pas cu pas, începând de la **1**, prin operații recursive.

De fapt – cel puțin astfel „privind” - nu s-ar presupune că acestea – cel puțin cele naturale - ar exista „deja” ca un mulțime infinită dată, ci sunt construite, pornindu-se de la un element de bază, notat de obicei cu **0** uneori **1** – în chiar acest caz - prin aplicarea unei funcții „succesor” pentru a se genera următorii termeni.

Așa încât – pur și simplu:

Dacă **n** este un număr natural, atunci **S(n)** – adică: abia menționata funcții „succesorul lui **n**” - este un număr natural.

Astfel creându-se secvența: **0, S(0) = 1, S(S(0)) = 2, S(S(S(0))) = 3** și așa mai departe.

Sau – precum în accepțiile peanoiene **1, S(1) = 2, S(S(1)) = 3, S(S(S(1))) = 4** și așa mai departe.

Așa încât, fiecare număr este construit finit, prin aplicări succesive ale lui **S**.



Iar, în acest context „operațiile” sunt definite recursiv, ceea ce se potrivește perspectivelor constructiviste, întrucât – pur și simplu - fiecare valoare este calculată pas cu pas, astfel încât:

Adunarea (+):

Cazul de bază: $m + 1 = S(m)$

Pasul inductiv: $m + S(n) = S(m + n)$

Precum spre exemplu:

Pentru a calcula $2 + 3$:

$$2 + 3 = 2 + S(2) = S(2 + 2) = S(S(2 + 1)) = S(S(S(2))) = S(S(S(S(1)))) = 5.$$

Așa încât, fiecare pas reprezintă o „construcție” explicită.

Înmulțirea (×):

Cazul de bază: $m \times 1 = m$

Pasul inductiv: $m \times S(n) = m + (m \times n)$

Precum, spre exemplu:

$$3 \times 2 = 3 + (3 \times 1) = 3 + 3 = S(S(S(3))) = S(S(S(S(S(1)))))) = 6.$$

Deci – și în acest caz - fiecare pas reprezintă o „construcție” explicită.

Iar, celelalte operații - precum scăderea sau diviziunea – care nu sunt „complet închise” în mulțimea numerelor naturale – întrucât spre exemplu, $2 - 3 = -1$, iar „-1” nu este nicidecum un număr natural – nu sunt astfel definite, dar constructivist privind, pot fi definite chiar în momentul în care astfel de „construcții” au sens.

Oricum – revenind - aproape „toată aritmetica peanoeană” se fondează pe „Principiul Inducției Constructive” – și de altfel, tot „constructivist privind” reprezintă un concept acceptabil, întrucât implică succesiuni absolut succesiv ordonate de construcții.

Așa încât:

Pentru orice proprietate $P(n)$ care poate fi „constructiv definită” - adică, decidabilă sau cu dovadă explicită:

Dacă $P(1)$ este adevărat – în „cazul de bază”.

Și dacă, pentru orice n , dacă $P(n)$ cu adevărat există, atunci $P(S(n))$ cu adevărat există - „pasul inductiv”.



esteticademersurilorinutile.gmail.com
esteticademersurilorinutile.com

Atunci, pentru orice număr natural k , $P(k)$ este adevărat.

Și atunci:

„ARITHMETICES PRINCIPIA

NOVA METHODO EXPOSITA

A

IOSEPH PEANO

in R. Academia militari professore

Analysin infinitorum in R. Taurinensi Athenæo docente.

[F, B, Labor et honor]

AUGUSTAE TAURINORUM

EDIDERUNT FRATRES BOCCA



Regis bibliopolae

Romae
Via del Corse, 216-217.

Florentiae
Via Oerretani, 8.

1889

PRAEFATIO

Quaestiones, quae ad mathematicae fundamenta pertinent, etsi hisce temporibus a multis tractatae, satisfacienti solutione et adhuc carent. Hic difficultas maxime ex sermonis ambiguitate oritur.

Quare summi interest verba ipsa, quibus utimur attente perpendere. Hoc examen mihi proposui, atque mei studii resultatus, et arithmeticae applicationes in hoc scripto expono.

Ideas omnes quae in arithmeticae principiis occurrunt, signis indicavi, ita ut quaelibet propositio his tantum signis enunciatur.

Signa aut ad logicam pertinent, aut proprie ad arithmetica. Logicae signa quae hic occurrunt, sunt numero ad decem, quamvis non omnia necessaria. Horum signorum usus et proprietas nonnullae in priore parte communi sermone explicantur. Ipsorum theoriam fusius hic exponere nolui. Arithmeticae signa, ubi occurrunt, explicantur.

His notationibus quaelibet propositio formam assumit atque praecisionem, qua in algebra aequationes gaudent, et a propositionibus ita scriptis alia deducuntur, idque processis qui aequationum resolutioni assimilantur. Hoc caput totius scripti.

Sique, confectis signis quibus arithmeticae propositiones scribere possim, in earum tractatione usus sum methodo, quam quia et in aliis studiis sequenda foret, breviter exponam.

Ex arithmeticae signis quae caeteris, una cum logicae signis exprimere licet, ideas significant quas definire possumus. Ita omnia definitiva signa, si quatuor excipias, quae in explicationibus §1 continentur. Si, ut puto, haec ulterius reduci nequeunt, ideas ipsis expressas, ideis quae prius notae supponuntur, definire non licet.

Propositiones, quae logicae operationibus a caeteris deducuntur, sunt Theoremata; quae vero non, axiomata vocavi. Axiomata hic sunt novem (§1) et signorum, quae definitione carent, proprietates fundamentales exprimunt.

In §1-6 numerorum proprietates communes demonstravi; brevitatis causa, demonstrationes praecedentibus similes omisi; demonstrationum communem formam immutare oportet ut logicae signis exprimantur; haec transformatio interdum difficilior est, tamen inde demonstrationis natura clarissime patet.

In sequentibus § varia tractavi, ut huius methodi potentia magis videatur. In §7 nonnulla Theoremata, quae ad numerorum theoriam pertinent, continentur. In §8 et 9 rationalium et irrationalium definitiones inveniuntur.

Denique, in §10, Theoremata exposui nonnulla, quae nova esse puto, ad entium theoriam pertinentia, quae cl.mus Cantor Punktmenge (ensemble de points) vocavit.



In hoc scripto aliorum studiis usus sum. Logicae notationes et propositiones quae in num. II, III et IV continentur, si nonnullas excipias, ad multorum opera, inter quae Boole praecipue, referenda sunt.

Boole:

The mathematical analysis of logic ... Cambridge, 1847.

The calculus of logic, Camb. and Dublin Math. Journal, 1848.

An investigation of the laws of thought ... London, 1854.

E. Schröder:

Der Operationskreis des Logikkalkulus, Leipzig, 1877.

Ipse iam nonnulla quae ad logicam pertinent tractavit in praecedenti opera.

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra ... Leipzig, 1873.

Boole e Schröder theorias brevissime exposui in meo libro calcolo geometrico ... Torino, 1888.
vide:

C. S. Pierce:

On the Algebra of logic; American Journal, III, 15; VII, 180.

Jevons:

The principles of science, London, 1883.

McColl:

The calculus of equivalent statements, Proceedings of the London Math. Society, 1878, vol. IX, 9. vol X, 16.

Signum ϵ , quod cum signo $\supset$ confundere non licet, inversionis in logica applicationes, et paucas alias institui conventiones, ut ad exprimendam quamlibet propositionem pervenirem.

In arithmeticae demonstrationibus usus sum libro: H. Grassmann, Lehrbuch der Arithmetik, Berlin 1861.

Utilius quoque mihi fuit recens scriptum: R. Dedekind, Was sind und Was sollen die Zahlen; Braunschweig, 1888, in quo quaestiones, quae ad numerorum fundamenta pertinent, acute examinantur.

Hic meus libellus ut novae methodi specimen habendus est. Hisce notationibus innumeras alias propositiones, ut quae ad rationales et irrationales pertinent, enunciare et demonstrare possumus.

Sed, ut aliae theoriae tractentur, nova signa, quae nova indicant entia, instituere necesse est. Puto vero his tantum logicae signis propositiones cuiuslibet scientiae exprimi posse, dummodo adiungantur signa quae entia huius scientiae representant."

Cu alte cuvinte:



PRINCIPIILE ARITMETICII
PREZENTATE ÎNTR-O NOUĂ METODĂ
DE
GIUSEPPE PEANO

Profesor la Academia Militară Regală

Predând Analiza Infinitului la Universitatea Regală din Torino.

[F, B, Muncă și onoare]



TORINO

PUBLICAT DE FRAȚII BOCCA

Librari regali

Roma
Strada del Corso, 216-217.

Florența
Strada Cerretani, 8.

1889

PREFAȚĂ

Problemele legate de fundamentele matematicii, deși tratate în zilele noastre de mulți, încă nu au primit o soluție satisfăcătoare. Această dificultate provine în principal din ambiguitatea limbajului.

De aceea, este foarte important să alegem cu atenție cuvintele pe care le folosim. Drept pentru care mi-am propus acest exercițiu, iar rezultatele studiului meu, precum și aplicațiile aritmetice, sunt expuse în această lucrare.

Și am reprezentat toate ideile care apar în principiile aritmeticii prin semne, astfel încât fiecare propoziție să fie exprimată doar prin aceste semne.

Semnele aparțin fie logicii, fie propriu-zis aritmeticii. Semnele logice care apar aici sunt în număr de zece, deși nu toate sunt necesare. Iar, utilizarea și proprietățile acestor semne sunt explicate în parte în limbaj natural în secțiunea introductivă. Nu am dorit să dezvolt aici în detaliu teoria lor. Semnele aritmetice sunt explicate acolo unde apar.

Cu aceste notații, fiecare propoziție capătă o formă și o precizie comparabile cu cele ale ecuațiilor algebrice, iar din propozițiile astfel scrise se deduc altele, printr-un proces asemănător rezolvării ecuațiilor. Aceasta este esența întregii lucrări.

Astfel, după ce am stabilit semnele cu care pot exprima propozițiile aritmetice, am folosit în tratarea lor o metodă pe care, deoarece ar putea fi aplicată și în alte domenii, o voi descrie pe scurt.

Din semnele aritmetice, împreună cu cele logice, se pot exprima idei pe care le putem defini. Astfel, am definit toate semnele, cu excepția a patru, care sunt explicate în paragraful §1. Dacă, așa cum cred, aceste semne nu pot fi reduse mai departe, ideile exprimate prin ele nu pot fi definite prin idei presupuse a fi cunoscute anterior.



Propozițiile deduse din alte propoziții prin operații logice sunt numite „teoreme”; cele care nu sunt deduse astfel le-am numit „axiome”. Aici există nouă axiome (§1) care exprimă proprietățile fundamentale ale semnelor care nu au o definiție.

În paragrafele §1-6 am demonstrat proprietățile generale ale numerelor; pentru concizie, am omis demonstrațiile similare celor precedente; forma generală a demonstrațiilor trebuie modificată pentru a fi exprimată prin semne logice; această transformare este uneori mai dificilă, dar astfel natura demonstrației devine extrem de clară.

În paragrafele următoare am tratat diverse subiecte, pentru a evidenția mai bine puterea acestei metode. În §7 sunt incluse câteva teoreme referitoare la teoria numerelor. În §8 și §9 se găsesc definițiile numerelor raționale și iraționale.

În sfârșit, în §10, am expus câteva teoreme pe care le consider noi, referitoare la teoria entităților, pe care distinsul domn Cantor le-a numit „Punktmengen”²⁷ - mulțime de puncte.

În această lucrare m-am bazat pe studiile altora. Notațiile logice și propozițiile conținute în numerele II, III și IV, cu câteva excepții, se raportează la lucrările multora, în special ale lui Boole.

Boole²⁸:

27 De fapt, domnul Cantor nu a folosit chiar termenul „Punktmengen” în lucrările domniei sale.

Domnia sa a propus o serie de lucrări intitulate „Über unendliche lineare punktmannichfaltigkeiten” – între anii 1879 și 1884 în „Mathematische Annalen.” - unde folosea termenul „Punktmannichfaltigkeiten” - varietăți de puncte/mulțimi de puncte.

Așa încât, folosea termenul „Mannichfaltigkeit” - varietate/mulțime - pentru ceea ce actualmente numim „set”, termenul german modern fiind „Menge”.

Deci, probabil domnul Peano a folosit expresia „Punktmengen” pentru a reprezenta cât mai expresiv conceptul domnului Cantor. Iar, expresia – franceză - „ensemble de points” ar putea fi o traducere ceva mai fidelă a acestuia, deși nici aceasta nu este exact terminologia originală germană promovată de către domnul Cantor.

Oricum, în acest context, domnia sa a promovat o teorie riguroasă a mulțimilor infinite de puncte, cu accent pe cardinalitate și numere transfinite, distincția între cardinalitatea mulțimii numerelor naturale și cea a numerelor reale, punând bazele „ipotezei continuumului”, analiza mulțimilor derivate și a proprietăților topologice ale „dreptei reale” care au influențat topologia și analiza.

Așa încât, altfel spus, a formulat fundamente pentru teoria mulțimilor, care – ulterior - au devenit esențiale pentru matematică.

Iar, prin „Ipoteza continuumului”, formulată de către domnul Cantor, se referă la cardinalitatea – altfel spus: „mărimea” - mulțimilor infinite și afirmă că: nu există nicio mulțime a cărei cardinalitate să fie strict mai mare decât cardinalitatea numerelor naturale și strict mai mică decât cardinalitatea numerelor reale. Și a rămas ... indecidabilă.

În timp ce – desigur – „dreapta reală” se referă la mulțimea numerelor reale, reprezentată ca o linie pur și simplu infinită.

Dar, în acest context, nu voi insista asupra mai multor detalii.

28 „The Mathematical Analysis of Logic”, Cambridge, 1847 – lucrarea domnului George Boole, publicată la, Cambridge: Macmillan, Barclay, & MacMillan; London: George Bell”, în 1847 - este lucrarea care a revoluționat „logica”, marcând desprinderea de tradițiile aristotelice bazată pe silogisme, domnia sa – de altfel - fiind primul logician care a aplicat cu succes metodele algebrice logicii, punând astfel bazele a ceea ce – desigur - actualmente se reprezintă prin „algebra booleană și calculul propozițional”, în timp ce a înlocuit limbajul naturală cu simboluri matematice pentru a putea exprima relații logice și a creat un sistem formal pentru manipularea conceptelor - în acest context – implicate.

„The Calculus of Logic” – lucrare publicată în „Cambridge and Dublin Mathematical Journal”, în volumul III din 1848 printre paginile 183 și 198 - aparținând tot domnului George Boole, lucrarea „The Calculus of Logic” reprezintă o extindere a ideilor domniei sale propuse în „The Mathematical Analysis of Logic” în care rafinează algebra logică, introducând un sistem simbolic pentru a exprima și manipula propoziții logice folosind operații algebrice.

Desigur, ambele lucrări prezintă perspective complementar sinoptice și formează nucleul algebrei booleene, în timp ce, revenind:

„An Investigation of the Laws of Thought” – publicată la „London - Walton and Maberly” în 1854 reprezintă o dezvoltare a „algebrei booleene”, în care domnul Boole – desigur - formalizează logica deductivă și propune bazele



„The Mathematical Analysis of Logic”, Cambridge, 1847.

„The Calculus of Logic”, Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 1848.

„An Investigation of the Laws of Thought”, London, 1854.

E. Schröder²⁹:

„Der Operationskreis des Logikkalkulus”, Leipzig, 1877.

De fapt, el însuși a tratat deja unele lucruri care se referă la logică în:

teoriei probabilităților folosind metode algebrice.

Și este mult mai extinsă decât lucrările anterior menționate - aproximativ 400 de pagini - și este considerată un alt fundament al „logicii matematice moderne”.

29 În „Der Operationskreis des Logikkalküls”, publicată de către domnul Ernst Schröder în 1877 la Leipzig, - la Editura B.G. Teubner – domnia sa revizuieste în mod critic logica claselor abia propusă de către domnul George Boole, subliniind ideea dualității între „adunarea logică și înmulțirea logică” în timp ce propune o notație mai clară pentru operațiile logice și clarifică concepte precum subsumarea - incluziunea logică - și cuantificarea.

Așa încât:

a. În cazul „adunării logice” - **OR**, $\vee$, + - $A \vee B = „A \text{ sau } B”$, rezultatul este adevărat dacă cel puțin unul dintre **A** sau **B** este adevărat.

b. În „înmulțirii logice”- **AND**, $\wedge$, $\times$ - $A \wedge B = „A \text{ și } B”$, rezultatul este adevărat doar dacă ambele **A** și **B** sunt adevărate.

Cu alte cuvinte, domnul Schröder propune conceptul unui „cerc operațional” – Operationskreis – prin care descrie modul în care operațiile logice $\vee$ $\wedge$ sunt simetric relaționate.

c. Legea idempotenței: $A \vee B = A$ și $A \wedge B = A$.

d. Legea absorbției: $A \vee (A \wedge B) = A$ și $A \wedge (A \vee B) = A$

Ceea ce conduce spre ceea ce actualmente reprezintă:

e: Dualitatea - „Legii lui De Morgan”, care sunt expresii „duale”:

1. „Nu (A sau B)” $\equiv$ „Nu A ȘI NU B” ori formal: $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

2. „Nu (A și B)” $\equiv$ „Nu A SAU NU B” ori formal: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

Și totodată – așa precum abia am sugerat și probabil influențat de către perspectivele domnului Charles Sanders Peirce - domnia sa promovează în ancadrament boolean „subsumarea și cuantificarea”

De fapt, „subsumarea” reprezintă „incluziunea logică”: $A \subseteq B$ ori **A** este subsumată de **B**, altfel spus „Toate elementele din **A** aparțin și lui **B**”, precum spre exemplu: „**filosofii** $\subseteq$ **oameni**”

Iar – tot în acest context - „cuantificarea” se referă la conceptele, pur și simplu atât denotate cât și reprezentate, de: „ **$\forall$** ” pentru „**toate**” și „ **$\exists$** ” pentru „**există**”.

Așa încât, domnul Schröder a folosit „cuantificatori” pentru a exprima propoziții de tipul „pentru orice **x**, **x** are proprietatea **P**” sau „există un **x** astfel încât **x** satisface $R(x, y)$ ” extinzând - astfel - algebra booleană, care era limitată la operații statice pe clase, fără a lua în considerare variabile individuale cuantificate.

Spre exemplu, domnia sa a dezvoltat o notație pentru relații binare, cum ar fi $R(x, y)$ și a folosit cuantificatori pentru a exprima afirmații generale, pentru a putea exprima „pentru orice **x**, există un **y** astfel încât **x** satisface relația **R** cu **y**” folosind o combinație de operații booleene și cuantificatori, ceea ce a anticipat logica de ordinul întâi modernă.

Dar, nici asupra acestor detalii – în acest context – nu voi insista.



„Lehrbuch der Arithmetik und Algebra”, Leipzig, 1873³⁰.

Eu însumi am tratat deja câteva aspecte - foarte pe scurt - legate de teoriile lui domnilor Boole și Schröder, în anterioara mea lucrarea - „Calculo geometrico”, Torino, 1888³¹.

Vezi și:

C. S. Peirce:

On the Algebra of Logic, American Journal, III, 15; VII, 180³².

Jevons:

The Principles of Science, London, 1883³³.

30 Iar, în „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra: für Lehrer und Studierende” - publicată la „B. G. Teubner”, în Leipzig, în 1873 - domnul Schröder deja promovase o abordare riguroasă a aritmeticii și algebrei, definind concepte precum mulțimea, numerele cardinale și ordinale și operațiile algebrice fundamentale - adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere, extragere a rădăcinii, logaritmare. Și - alături de toate acestea - propunea un limbaj formal pentru a clarifica operațiile matematice, discutând noțiuni precum comparația numerelor și utilizarea parantezelor pentru a evita ambiguitățile.

31 În „Calcolo Geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva” - publicată la „Fratelli Bocca Editori”, în Torino, în 1888 - domnia sa a prezentat elementele de bază ale calculului geometric și a dat definiții noi pentru lungimea unui arc și pentru aria unei suprafețe curbe

De fapt, domnia sa promova și dezvoltă ideile din „Ausdehnungslehre” - teoria extensiunii - deja propuse de către domnul Hermann Grassmann - și reprezentată de un sistem matematic care operează cu entități geometrice într-un mod analog algebrei numerice.

Așa încât, în acest context, domnul Peano expune „calculul vectorial” într-o formă „pre-modernă”, „operații geometrice sistematice” analoge celor algebrice bazate pe numere, noi definiții pentru lungimea unui arc și aria unei suprafețe curbe cât și o metodă mai puternică decât geometria analitică clasică.

32 De fapt, domnul Peirce a publicat două lucrări intitulate „On the Algebra of Logic” în American Journal of Mathematics, prima în 1880 în volumul III, numărul 1, printre paginile 15 și 57 și a doua în 1885 în volumul VII, numărul 2, printre paginile 180 și 202, în care a extins algebra booleană, formalizând operațiile logice - conjuncție, disjuncție, negație - pentru a crea un sistem riguros bazat pe clase, a formulat o algebră a relațiilor, extinzând logica dincolo de propoziții simple, permițând formalizarea relațiilor între entități, a dezvoltat conceptul de „principiu conducător”, ca regulă generală pentru validitatea inferențelor logice, punând astfel bazele unei abordări sistematice a raționamentului, în timp ce, a propus termenul „cuantificator” și a dezvoltat logica predicatelor de ordinul întâi, formalizând noțiuni precum „toți” ($\forall$) și „există” ($\exists$) esențiale pentru logica modernă - astfel promovând o notație logică clară și eficientă și totodată propunând principii pentru crearea simbolurilor logice care să faciliteze raționamentul, influențând standardizarea notațiilor matematice - și în care, desigur, a rafinat algebra relațiilor, integrând contribuțiile domnului Oscar Howard Mitchell - care a introdus indici pentru a exprima relații complexe - consolidând bazele logicii simbolice.

33 De fapt, domnul William Stanley Jevons în „The Principles of Science: A Treatise on Logic and Scientific Method” - publicată la „London, Macmillan and Co.” în 1883, a patra ediție, revizuită din prima, din 1874, - printre altele - propunea:

a. „Unificarea inducției și deducției” argumentând că, inducția nu este o metodă distinctă de deducție, ci mai degrabă o aplicare inversă a acesteia.

Tradițional, în filosofie și logică, deducția și inducția sunt considerate forme distincte de raționament, așa încât:

Deducția: plecând de la premise generale se ajunge la o concluzie specifică, care este logic necesară dacă premisele sunt adevărate.

Spre exemplu:



McColl:

The Calculus of Equivalent Statements, Proceedings of the London Mathematical Society, 1878, vol. IX, 9; vol. X, 16³⁴.

Semnul ϵ , care nu trebuie confundat cu semnul $\supset$, aplicațiile inversiunii în logică și câteva alte convenții le-am stabilit pentru a putea exprima orice propoziție.

Premisă: Toți oamenii sunt muritori.

Premisă: Socrate este om.

Concluzie: Socrate este muritor.

Inducția: plecând de la observații specifice se ajunge la o generalizare, care este doar probabilă, nu necesară.

Spre exemplu:

Observație: Soarele a răsărit în fiecare dimineață observată.

Concluzie: Soarele va răsări mâine dimineață.

Doar că, domnul Jevons a contestat această strictă separare, susținând că inducția poate fi înțeleasă ca un proces logic strâns legat de deducție, în sensul că procesul inductiv implică tot un raționament logic, dar orientat în sens opus: în loc să pornească de la general la particular - ca deducția - inducția construiește generalizări pornind de la cazuri particulare.

Și mai mult chiar, a sugerat că acest proces poate fi formalizat folosind principii logice similare - folosind un sistem bazat pe algebra logică inspirată din perspectivele domnului George Boole - întrucât inducția implică formularea unei ipoteze generale - o lege sau o regulă - care explică observațiile specifice, iar această ipoteză este apoi testată deductiv.

Astfel, în loc să reprezinte un proces complet separat, inducția este o etapă preliminară care generează ipoteze, iar deducția verifică dacă aceste ipoteze sunt consistente cu observațiile. Așa încât - pur și simplu - formalizarea logică a inducției implică transformarea observațiilor într-un cadru logic, unde ipoteza generală este o concluzie derivată din premisele observaționale - dar cu o probabilitate, nu cu certitudine absolută.

Așa încât:

Observațiile specifice – datele - sunt considerate premise.

Se formulează o ipoteză generală care să explice aceste observații.

Apoi, această ipoteză este apoi testată deductiv pentru a verifica dacă este compatibilă cu alte observații.

Spre exemplu, în loc să se clameze „se observă că soarele răsare zilnic, deci va răsări mereu” – clasic-inductiv - procesul s-ar putea re-formula astfel:

Premise: Soarele a răsărit în zilele observate – la date specifice.

Ipoteză: Există o lege generală conform căreia soarele răsare zilnic.

Test deductiv: Dacă legea este adevărată, atunci soarele va răsări mâine (verificăm ipoteza).

b. A introdus metode precum „substituția similarilor” și a promovat utilizarea unor instrumente logice, cum ar fi „logicul abecedarium” și „mașina logică” - logical piano - pentru a rezolva probleme logice complexe.

c. Jevons a subliniat importanța metodelor precise de măsurare și observație în știință și a dezvoltat o teorie a inducției bazată pe probabilitate și testarea ipotezelor, promovând o abordare ipotetico-deductivă și astfel criticând empirismul și susținând că legile generale sunt doar „probabile” din cauza limitărilor observației complete.



În demonstrațiile aritmetice am folosit lucrarea domnului: H. Grassmann, „Lehrbuch der Arithmetik”, Berlin, 1861³⁵.

Mi-a fost de asemenea utilă lucrarea recentă a domnului: R. Dedekind - „Was sind und was sollen die Zahlen”, Braunschweig, 1888³⁶ - în care problemele legate de fundamentele numerelor sunt examinate cu mare acuitate.

Această mică lucrare a mea trebuie considerată un exemplu a unei noi metode. Cu aceste notații, nenumărate alte propoziții, cum ar fi cele referitoare la numerele raționale și iraționale, pot fi enunțate și demonstrate.

Dar, pentru a trata alte teorii, este necesar să se introducă noi semne care să indice noi entități. Cred, totuși, că doar cu aceste semne logice pot fi exprimate propozițiile oricărei științe, cu condiția să fie adăugate semne care să reprezintă entitățile specifice acelei științe.

„Signorum tabula”

d. A integrat probabilitatea în logica științifică, considerând-o o măsură a „ignorantei raționale” sau a „așteptării raționale”.

e. A discutat despre generalizare, analogie și clasificare, subliniind importanța continuității și a proprietăților uniforme în științele naturii.

f. Desigur, a criticat metoda inductivă pur empirică – baconiană - promovând o abordare mai flexibilă, bazată pe ipoteze și teorii și subliniind curajul intelectual în formularea ipotezelor noi.

Așa încât – revenind - publicată inițial în 1874 și revizuită în 1883, lucrarea domniei sale a reprezentat un răspuns la dezbaterile vremii privind natura raționamentului științific, punând bazele pentru un soi de epistemologie modernă.

34 De fapt, domnul Hugh MacColl a publicat seria de lucrări intitulate „The Calculus of Equivalent Statements” în „Proceedings of the London Mathematical Society”, incluzând articolele din 1877 - volumul IX, printre paginile 9 și 20 - și în 1878 - volumul X, printre paginile 16 și 28 - aducând contribuții fundamentale la logica simbolică și la dezvoltarea unui sistem logic care a influențat logica modernă.

Așa încât, a dezvoltat un sistem logic numit „Calculul afirmațiilor echivalente” - „Calculus of Equivalent Statements: - prin care urmărea să formalizeze raționamentul logic folosind un limbaj simbolic, care - spre deosebire de algebra booleană tradițională a lui George Boole, care se concentra pe clase și operații numerice, promova un sistem bazat pe propoziții - afirmații - și relațiile lor de echivalență:

În articolul din 1877, a prezentat 11 definiții și 8 reguli, însoțite de exemple, pentru a construi acest soi de „calcul” care includeau simboluri precum $A : B$ (implicația „A implică B”) și echivalențe precum $A = AB$ care exprimă relații logice între propoziții.

În articolul din 1878, a adăugat 2 definiții și 6 reguli suplimentare, extinzând sistemul cu metode precum „substituția unității și zeroului” pentru a analiza implicațiile și elimina variabilele.

De fapt, domnia sa a definit implicația ($A : B$) ca o relație în care „dacă A este adevărat, atunci B este adevărat” mutând accentul de la logica claselor – promovată de către donul Boole la logica propozițiilor și a arătat că, implicația $A : B$ este echivalentă cu ecuația $A = AB$, oferind o bază algebrică pentru manipularea afirmațiilor.

Și – totodată - a analizat silogisme tradiționale, arătând că regulile promovate de către domnia sa pot cuprinde toate silogisme valide.

Pentru ca, în cele din urmă, să extindă paradigma abia propusă la aplicații practice - precum ar fi determinarea limitelor de integrare în calculul probabilităților - totodată sugerând că acesta poate fi folosit pentru a investiga cauzele fenomenelor naturale, astfel extinzând aplicabilitatea logicii sale dincolo de ceea ce s-ar putea înțelege prin matematică.

Iar, prin concentrarea „calculului” domniei sale pe implicații și echivalențe propoziționale, domnul MacColl a anticipat concepte care au fost dezvoltate ulterior în logica modernă - precum ar fi implicația materială și logica modală, asupra cărora voi reveni într-un context dedicat.

35 Desigur, aceea abia menționată.

36 Desigur, tot aceea abia menționată.



Logicam signa			Arithmeticae signa		
Signum	Significatio	Pag.	Signa 1, 2 ... = , >, <, +, -, × vulgarem habent significationem. Divisionis signum est /.		
P	propositio	VII			
K	classis	X	Signum	significatio	Pag.
$\cap$	et	VII, X	N	numerus integer positivus	1
$\cup$	vel	VIII, X, XI	$\mathbb{R}$	num. rationalis positivus	12
–	non	VIII, X	$\mathbb{Q}$	quantitas, sive numerus realis positivus	16
$\wedge$	absurdum aut nihil	VIII, XI	Np	numerus primus	9
$\supset$	deducitur aut continetur	VIII, XI	M	maximus	6
=	est aequalis	VIII	W	minimus	6
ϵ	est	X	T	terminus, vel limes summus	15
[]	inversionis signum	XI	$\mathcal{D}$	dividit	9
$\ni$	qui vel [ϵ]	XII	$\mathfrak{D}$	est multiplex	9
Th	Theorema	XVI	π	est primus cum	6
Hp	Hypothesis				
Ts	Thesis				
L	logica				
		Signa composita			
		– <	non est minor		
		= $\cup$ >	est aequalis aut maior		
		$\ni \mathcal{D}$	divisor		
		$M \ni \mathcal{D}$	maximus divisor		

Deci:

Tabelul de simboluri



Semne logice			Semne aritmetice		
Simbol	Semnificație	Pag.	Semnele 1, 2 ... = , > , < , + , - , × au semnificația obișnuită. Semnul împărțirii este /.		
P	Propoziție	VII			
K	Clasă/ Mulțime/Set	X	Simbol	Semnificație	Pag.
$\cap$	ȘI – „intersecție”, „produs” (deși actualmente pentru ȘI se folosește și „ $\wedge$ ”)	VII, X	N	Numere întregi și pozitive or „N”aturale, cu alte cuvinte.	1
U	SAU – „reuniune” (deși actualmente pentru SAU se folosește și „ $\vee$ ”)	VIII, X, XI	$\mathbb{R}$	Numere raționale pozitive	12
–	NU (actualmente $\neg$)	VIII, X	$\mathbb{Q}$	Cantitate sau număr real pozitiv Deși, desigur, în accepțiuni contemporane „ $\mathbb{Q}$ ” reprezintă mulțimea numerelor raționale, „ $\mathbb{Q}^+$ ” dacă sunt și pozitive, în timp ce „ $\mathbb{R}$ ” reprezintă mulțimea numerelor reale.	16
$\wedge$	Absurd, fals sau nimic (actualmente ... = $\emptyset$ ori $\perp$)	VIII, XI	$\mathbb{N}_p$	Numere prime („ $\mathbb{P}$ ” reprezentând actualmente, mulțimea numerelor prime)	9
$\supset$	Se deduce (dacă ... atunci ...) sau o mulțime conține altă mulțime	VIII, XI	M	Maximul	6



	(actualmente $\supset$ ori – după caz - $\subseteq$ sau $\subset$)				
=	EGAL	VIII	W^{37}	Minimul	6
ϵ	ESTE	X	T	Punct terminal sau supremum	15
[]	semnul de in- versare	XI	D^{38}	Divide	9
$\exists$	astfel încât sau [c]	XII	D^{39}	Este multiplu	9
Th	Teoremă	XVI	π	„Este prim cu”	6
Hp	Ipoteză				
Ts	Teză				
L	logic				
		Signa composita			
		$- <$	nu este mai mic decât (ac- tualmente $\leq$)		
		$= \cup >$	este egal cu sau mai mare decât (actual- mente $\geq$)		
		$\exists D$	Divizor (actu- almente deși uneori este fo- losit și în loc de „astfel în- cât”)		
		$M \exists D$	cel mai mare divizor (cm- mdc)		

Oricum, revenind:

„Logicae notationes.

I. De punctuatione.

37 În original, simbolul folosit a fost un „M ... răsturnat”.

38 În original, simbolul folosit a fost un „D”.

39 În original, simbolul folosit a fost un „D ... în oglindă”.



Litteris $a, b \dots x, y \dots x' y' \dots$ entia indicamus indeterminata quaecumque. Entia vero determinata signis, sive litteris $P, K, N \dots$ indicamus.

Signa plerumque in eadem linea scribemus. Ut ordo pateat quo ea coniungere oporteat, parentheses ut in algebra, sive punctis $\therefore \therefore ::$ etc. utimur.

Ut formula punctis divisa, intelligatur, primum signa quae nullo puncto seperantur colligenda sunt, postea quae uno puncto, deinde quae duobus punctis, etc. Ex. g. sint $a, b, c \dots$ signa quaecumque. Tunc $ab \cdot cd$ significat $(ab)(cd)$; et $ab \cdot cd : ef \cdot gh \dots k$ significat $((ab)(cd))((ef)(gh))k$.

Punctuationis signa omittere licet si formulae quae diversa punctuatione existerent eundem habeant sensum; vel si una tantum formula, et ipsa quam scribere volumus, sensum habeat. Ut ambiguitatis periculum absit, arithmeticae operationum signis $\therefore$ nunquam.

Parenthesum figura una est (); si in eadem formula, parentheses et puncta occurrant, primum quae parentheses continentur, colligantur.

II. De propositionibus.

Signo P significatur propositio. Signum $\cap$ legitur et. Sint a, b propositiones; tunc $a \cap b$ est simultanea affirmatio propositionum a, b . Brevitatis causa, loco $a \cap b$ vulgo scribemus $a \cdot b$.

Signum $-$ legitur non. Sit a quaedam P ; tunc $-a$ est negatio propositionis a . Signo $\cup$ legitur vel. Sint a, b propositiones; tunc $a \cup b$ idem est ac $- : -a \cdot -b$.

[Signo V significatur verum, sive identitas; sed hoc signo numquam utimur].

Signum $\wedge$ significat falsum, sive absurdum.

[Signum C significat est consequentia; ita $b C a$ legitur b est consequentia propositionis a . Sed hoc signo nunquam utimur].

Signum $\supset$ significat deducitur; ita $a \supset b$ significat quod $b C a$. Si propositiones a, b entia indeterminata continent $x, y \dots$ scilicet sunt inter ipsa entia conditiones, tunc $a \supset_{x,y} \dots b$ significat: quaecumque sunt $x, y \dots$ a propositione a deducitur b . Si vero ambiguitatis periculum absit, loco $\supset_{x,y} \dots$ scribemus solum $\supset$.

Signum $=$ significat est aequalis. Sint a, b propositiones; tunc $a = b$ idem significat quod $a \supset b \cdot b \supset a$; propositio $a = x, y \dots b$ idem significat quod $a \supset_{x,y} \dots b \cdot b \supset_{x,y} \dots a$.

Ori – cu alte cuvinte:

Notății logice

I. Despre punctuație.

Cu literele $a, b \dots x, y \dots x', y' \dots$ indicăm entități indeterminate oarecare. Entitățile determinate însă le indicăm cu semne sau cu literele $P, K, N \dots$



Semnele le vom scrie de obicei pe aceeași linie. Pentru ca să fie clar ordinea în care trebuie să le combinăm, folosim paranteze ca în algebră, sau puncte $\therefore$ și așa mai departe.

Pentru ca o formulă împărțită cu puncte să fie înțeleasă, mai întâi trebuie să se combine semnele care nu sunt separate de niciun punct, apoi cele cu un punct, după aceea cele cu două puncte și așa mai departe.

De exemplu, fie $a, b, c \dots$ semne oarecare. Atunci $ab \cdot cd$ înseamnă $(ab)(cd)$; și $ab \cdot cd : ef \cdot gh \dots k$ înseamnă $((ab)(cd))((ef)(gh)))k$.

Semnele de punctuație pot fi omise dacă formulele care ar exista cu punctuație diferită ar avea același sens; sau dacă doar o singură formulă - și anume cea pe care vrem să o scriem - are sens.

Pentru ca să nu existe pericolul ambiguității, semnelor operațiilor aritmetice $\therefore$ nu le folosim niciodată.

Simbolul pentru paranteză este $()$; dacă într-o aceeași formulă apar paranteze și puncte, se grupează mai întâi elementele din interiorul parantezelor.

II. Despre propoziții.

Prin semnul P se înțelege propoziție. Semnul $\cap$ se citește și. Fie a, b propoziții; atunci $a \cap b$ este afirmarea simultană a propozițiilor a, b . Pentru scurtime, în locul lui $a \cap b$ vom scrie de obicei $a \cdot b$.

Semnul $-$ se citește nu. Fie a o anumită P ; atunci $-a$ este negația propoziției a . Semnul $\cup$ se citește sau. Fie a, b propoziții; atunci $a \cup b$ este același lucru cu $- : -a \cdot -b$.

[Prin semnul V se înțelege adevărat, sau identitatea; dar acest semn nu îl folosim niciodată].

Semnul $\wedge$ a înseamnă fals, sau absurd.

[Semnul C înseamnă este consecință; astfel $b C a$ se citește b este consecința propoziției a . Dar acest semn nu îl folosim niciodată].

Semnul $\supset$ înseamnă se deduce; astfel $a \supset b$ înseamnă ceea ce înseamnă $b C a$. Dacă propozițiile a, b conțin entități indeterminate $x, y \dots$ adică sunt condiții între aceste entități, atunci $\supset_{x,y} \dots b$ înseamnă: oricare ar fi $x, y \dots$ din propoziția a se deduce b . Dacă însă nu există pericolul ambiguității, în locul lui $\supset_{x,y} \dots$ vom scrie doar $\supset$.

Semnul $=$ înseamnă este egal. Fie a, b propoziții; atunci $a = b$ înseamnă același lucru cu $a \supset b \cdot b \supset a$; propoziția $a = x, y \dots b$ înseamnă același lucru cu $a \supset_{x,y} \dots b \cdot b \supset_{x,y} \dots a$.

Așa încât:

„III. Logicae propositiones.

Sint $a, b, c \dots$ propositiones. Tunc erit:”

III. Propoziții logice.



Fie a, b, c ... propoziții. Atunci va fi:

Notăția originală		Interpretare contemporană
1.	$a \supset a$	Orice lucru îl implică pe el însuși: „Dacă a, atunci a.” $a \rightarrow a$
2.	$a \supset b . b \supset c : \supset : a \supset c$	Tranzitivitatea implicației: „Dacă a implică b și b implică c, atunci a implică c.” $((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$
3.	$a = b . = : a \supset b . b \supset a.$	Egalitatea este echivalentă cu implicația în ambele sensuri: „a este egal cu b dacă și numai dacă a implică b și b implică a.” $(a = b) = ((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a))$
4.	$a = a$	Orice lucru este egal cu el însuși: „a este egal cu a.” $a = a$
5.	$a = b . = . b = a$	Egalitatea este simetrică: „Dacă a este egal cu b, atunci b este egal cu a.” $a = b \rightarrow b = a$
6.	$a = b . b \supset c : \supset . a \supset c$	Egalitatea păstrează implicația: „Dacă a este egal cu b și b implică c, atunci a implică c.” $((a = b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$
7.	$a \supset b . b = c : \supset . a \supset c$	Implicația este păstrată sub egalitate. „Dacă a implică b și b este egal cu c, atunci a implică c.” $((a \rightarrow b) \wedge (b = c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$
8.	$a = b . b = c : \supset . a = c$	„Tranzitivitatea egalității”: „Dacă a este egal cu b și b este egal cu c,



		atunci a este egal cu c.” $((a = b) \wedge (b = c)) \rightarrow (a = c)$
9.	$a = b \cdot \supset \cdot a \supset b$	Egalitatea implică o implicație într-un sens: „Dacă a este egal cu b, atunci a implică b.” $(a = b) \rightarrow (a \rightarrow b)$
10.	$a = b \cdot \supset \cdot b \supset a$	Egalitatea implică o implicație în sens invers: „Dacă a este egal cu b, atunci b implică a.” $(a = b) \rightarrow (b \rightarrow a)$
11.	$ab \supset a$	Intersecția a două mulțimi este inclusă în prima mulțime: „Produsul (intersecția) lui a și b implică a.” $(a \wedge b) \rightarrow a$
12.	$ab = ba$	„Intersecția” este comutativă: „Produsul (intersecția) lui a și b este egal cu produsul lui b și a.” $(a \wedge b) = (b \wedge a)$
13.	$a(bc) = (ab)c = abc$	„Intersecția” este asociativă: „Intersecția dintre a cu (b și c) este egală cu intersecția (a și b) cu c, care este egal cu intersecția a, b și c.” $(a \wedge (b \wedge c)) = ((a \wedge b) \wedge c) = (a \wedge b \wedge c)$
14.	$aa = a$	Din intersecția unei mulțimi cu ea însăși rezultă aceeași mulțime: „Intersecția a cu a însuși este egal cu a.” $(a \wedge a) = a$
15.	$a = b \cdot \supset \cdot ac = bc$	Egalitatea păstrează intersecția: „Dacă a este egal cu b, atunci intersecția dintre a și c este egală cu intersecția dintre b și c.” $(a = b) \rightarrow ((a \wedge c) = (b \wedge c))$
16.	$a \supset b \cdot \supset \cdot ac \supset bc$	„Implicația se păstrează în intersecție”:



		„Dacă a implică b, atunci intersecția a și c implică intersecția lui b și c.” $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c))$
17.	$a \supset b . c \supset d : \supset . ac \supset bd$	Implicația se păstrează pentru intersecții: „Dacă a implică b și c implică d, atunci intersecția dintre a și c implică intersecția dintre b și d.” $((a \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow d)) \rightarrow ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge d))$
18.	$a \supset b . a \supset c : = . a \supset bc$	Implicația se distribuie peste intersecție: „a implică b și a implică c dacă și numai dacă a implică intersecția dintre b și c.” $((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)) = (a \rightarrow (b \wedge c))$
19.	$a = b . c = d : \supset . ac = bd$	Egalitatea se păstrează pentru intersecții: „Dacă a este egal cu b și c este egal cu d, atunci intersecția dintre a și c este egal cu intersecția dintre b și d.” $((a = b) \wedge (c = d)) \rightarrow ((a \wedge c) = (b \wedge d))$
20.	$\neg(\neg a) = a$	Dublă negație anulează ... negația inițială: „Negarea negației lui a este egală cu a.” $\neg(\neg a) = a$
21.	$a = b . = . \neg a = \neg b.$	Egalitatea se păstrează sub negație: „a este egal cu b dacă și numai dacă negația lui a este egală cu negația lui b.” $(a = b) = ((\neg a) = (\neg b))$
22.	$a \supset b . = . \neg b \supset \neg a =$	„Contra-pozitiva implicației”: „a implică b dacă și numai dacă negația lui b implică negația lui a.” $(a \rightarrow b) = ((\neg b) \rightarrow (\neg a))$
23.	$a \cup b . = \therefore \neg : \neg a . \neg b$	Legea lui De Morgan pentru reuniune: „Reuniunea lui a și b este echivalentă cu negația conjuncției negațiilor lui a și b.”



		$(a \vee b) = \neg((\neg a) \wedge (\neg b))$
24.	$\neg(ab) = (\neg a) \cup (\neg b)$	Legea lui De Morgan pentru intersecție: „Negația conjuncției dintre a și b este egală cu reuniunea negației lui a cu negația lui b.” $\neg(a \wedge b) = (\neg a) \cup (\neg b)$
25.	$\neg(a \cup b) = (\neg a) (\neg b)$	Cealaltă lege a lui De Morgan: „Negația reuniunii lui a și b este egală cu conjuncția negației lui a cu negația lui b.” $\neg(a \cup b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$
26.	$a \supset . a \cup b$	Orice mulțime este inclusă în reuniunea sa cu o altă mulțime: „a implică reuniunea lui a cu b.” $a \rightarrow (a \cup b)$
27.	$a \cup b = b \cup a$	Reuniunea este comutativă: „Reuniunea lui a cu b este egală cu reuniunea lui b cu a.” $a \cup b = b \cup a$
28.	$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c = a \cup b \cup c$	Reuniunea este asociativă. „Reuniunea lui a cu (b reunit cu c) este egală cu reuniunea lui (a reunit cu b) cu c, care este egală cu reuniunea lui a, b și c.” $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c = a \cup b \cup c$
29.	$a \cup a = a$	Din reuniunea unei mulțimi cu ea însăși rezultă aceeași mulțime: „Reuniunea lui a cu el însuși este egală cu a.” $a \cup a = a$
30.	$a(b \cup c) = ab \cup ac$	Distributivitatea intersecției peste reuniune: „Conjuncția dintre a cu reuniunea lui b și c este egală cu reuniunea conjuncției dintre a și b cu conjuncția dintre a și c.” $a \wedge (b \cup c) = [(a \wedge b) \cup (a \wedge c)]$



31.	$a = b . \supset . a \cup c = b \cup c$	Egalitatea păstrează reuniunea: „Dacă a este egal cu b, atunci reuniunea lui a cu orice mulțime c este egală cu reuniunea lui b cu mulțimea c.” $(a = b) \rightarrow ((a \cup c) = (b \cup c))$
32.	$a \supset b . \supset . a \cup c \supset b \cup c$	Implicația se păstrează pentru reuniuni: „Dacă a implică b, atunci reuniunea lui a cu orice mulțime c implică reuniunea lui b cu mulțimea c.” $((a \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow d)) \rightarrow [(a \cup c) \rightarrow (b \cup d)]$
33.	$a \supset b . c \supset d : \supset : a \cup c . \supset . b \cup d$	Implicația se păstrează pentru reuniuni: „Dacă a implică b și c implică d, atunci reuniunea lui a și c implică reuniunea lui b și d.” $((a \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow d)) \rightarrow ((a \cup c) \rightarrow (b \cup d))$
34.	$b \supset a . c \supset a : = . b \cup c \supset a$	Reuniunea păstrează implicația: „b implică a și c implică a dacă și numai dacă reuniunea lui b și c implică a.” $((b \rightarrow a) \wedge (c \rightarrow a)) = ((b \cup c) \rightarrow a)$
35.	$a - a = \wedge$	O mulțime minus ea însăși dă vidul: Diferența lui a cu el însuși este mulțimea vidă.” $[a \wedge \neg a] = \emptyset$
36.	$a \wedge = \wedge$	Din intersecția cu „nimic, nimic nu rezultă”: „Conjunția dintre a și mulțimea vidă este mulțimea vidă.” $a \wedge \emptyset = \emptyset$
37.	$a \cup \wedge = a$	Reuniunea cu „nimic, nimic nu aduce” : „Reuniunea lui a cu mulțimea vidă este egală cu a.” $a \cup \emptyset = a$
38.	$a \supset \wedge . = . a = \wedge$	Doar „nimic, nimic nu implică”:



		„a implică mulțimea vidă dacă și numai dacă a – însăși - este mulțimea vidă.” $a \rightarrow \emptyset = (a = \emptyset)$
39.	$a \supset b = . a - b = \wedge$	Implicația este echivalentă cu „nici o diferență”. „a implică b dacă și numai dacă din: a minus b rezultă mulțimea vidă.” $(a \rightarrow b) = ((a \wedge \neg b) = \emptyset)$
40.	$\wedge \supset a$	Vidul implică orice ⁴⁰ : $\emptyset \rightarrow a$ „Mulțimea vidă implică orice mulțime a.”
41.	$a \cup b = \wedge . = : a = \wedge . b = \wedge$	Din reuniunea a doua „nimicuri, nimic nu rezultă”. „Reuniunea lui a cu b este mulțimea vidă dacă și numai dacă a este mulțimea vidă și b este mulțimea vidă.” $((a \cup b) = \emptyset) = ((a = \emptyset) \wedge (b = \emptyset))$

40 În logica clasică, implicația „ $A \supset B$ ” (A implică B) este adevărată în toate cazurile, cu excepția situației în care A este adevărat și B este fals. În cazul propoziției $\wedge \supset a$, „mulțimea vidă” (notată cu $\wedge$) este considerată falsă în context logic (sau vidă în contextul teoriei mulțimilor).

Întrucât – pur și simplu - mulțimea vidă, adică „ $\wedge$ ” nu conține niciun element, nu poate fi nici „adevărată” într-un sens care să contrazică ceva.

Astfel, dacă premisa – adică: „ $\wedge$ ” - este falsă, adică mulțimea vidă, implicația „ $\wedge \supset a$ ” este automat adevărată, indiferent de valoarea lui „a”. Fie că „a” este adevărată sau falsă.

Spre exemplu:

„Ori $2 + 2 = 5$ ori Socrate a fost un mare filosof.”. Și cum $2 + 2$ tocmai am „demonstrat” că fac „4”, atunci mai rămâne doar posibilitatea ca faptul că „Socrate a fost un mare filosof” să fie adevărată.

Iar, acest „principiu” este cunoscut în logica clasică drept „ex falso quodlibet” – ori cu alte cuvinte, „din fals urmează orice” sau pur și simplu, „principiul exploziei”.

Așa încât, dacă „se pornește de la ceva fals” - precum ar fi mulțimea vidă - se poate implica orice, întrucât o premisă întotdeauna falsă nu va fi niciodată satisfăcută pentru a contrazice concluzia.

Ori – cu alte cuvinte – revenind: „Mulțimea vidă implică orice mulțime a” înseamnă că, în formalismul logic propus de către domnul Peano, mulțimea vidă - care nu conține elemente - „implică” orice altă mulțime, întrucât, o premisă falsă- „vidul” - în acest caz - nu poate conduce spre vreo contradicție.

Deci: „Vidul implică orice” reprezintă o modalitate concisă de a exprima această paradigmă, subliniind caracterul universal al implicației atunci când premisa este vidă.

Spre exemplu, dacă s-ar spune: „Dacă mulțimea vidă conține un element, atunci mulțimea a conține acel element”, s-ar afirma un adevăr, pentru că mulțimea vidă nu conține niciun element.

Prin urmare, premisa este falsă, iar implicația este adevărată indiferent de ce ceea ce – de fapt – chiar conține „a”.

Dar, asupra acestor detalii, voi reveni într-un context dedicat.



42.	$a \supset b \supset c : = : ab \supset c$	„Implicația” se distribuie peste intersecție: „a implică că b implică c dacă și numai dacă conjuncția dintre a și b implică c.” $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) = ((a \wedge b) \rightarrow c)$
43.	$a \supset b = c : = . ab = ac$	Implicația egalității se păstrează în intersecție: „a implică că b este egal cu c dacă și numai dacă conjuncția dintre a și b este egală cu conjuncția lui a și c.” $(a \rightarrow (b = c)) = ((a \wedge b) = (a \wedge c))$

Revenind:

„Sit α quoddam relationis signum (ex. gr. = , $\supset$) ita ut $\supset a \alpha b$ sit quaedam propositio. Tunc loco $- . a \alpha b$ scribemus $a - \alpha b$; scilicet:”

Fie α un simbol care reprezintă o relație - precum ar fi egalitatea „= ” sau implicația „ $\supset$ ” - astfel încât expresia „ $a \alpha b$ ” să fie o propoziție logică. În loc să scriem negația propoziției „ $a \alpha b$ ” ca „ $\neg(a \alpha b)$ ”, vom folosi notația „ $a - \alpha b$ ”.

Notația originală	Interpretare contemporană
$a - = b . = : - . a = b$	„a nu este egal cu b” ($a - = b$) este echivalent cu „nu este adevărat că a este egal cu b” ($\neg(a = b)$). $(a \neq b) = \neg(a = b)$
$a - \supset b . = : - . a \supset b$	„a nu implică b” ($a - \supset b$) este echivalent cu „nu este adevărat că a implică b” ($\neg(a \supset b)$). $(a \nrightarrow b) = \neg(a \rightarrow b)$

“Ita signum $- =$ significat non est aequalis. Si propositio a indeterminatum continet x, $a - = x \wedge$ significat: sunt x quae conditioni a satisfaciunt. Signum $- \supset$ significat non deducitur.

Similiter, si α et β sunt relationis signa, loco $a \alpha b$, et $a \alpha b . \cup . a \beta b$ scribere possumus $a . \alpha \beta . b$ et $a . \alpha \cup \beta . b$. Ita, si a et b sunt propositiones, formula $a . \supset - = . b$ dicit: ab a deducitur b, sed non vice versa.”

$$a . \supset - = . b : = : a \supset b . b - \supset a$$

Deci:

Cu alte cuvinte:



Simbolul $\neq$ înseamnă „nu este egal”. Dacă o propoziție a conține o variabilă x , expresia $a \neq x \wedge$ înseamnă că există cel puțin un x care satisface condiția a . Simbolul $\not\supset$ înseamnă ‘nu se deduce’.

În mod similar, dacă α și β sunt simboluri de relație, în loc să scriem $a \alpha b$ sau $a \alpha b \cup a \beta b$, putem folosi notațiile $a \cdot \alpha \beta \cdot b$ - pentru conjuncția relațiilor $a \alpha b$ și $a \beta b$ - și $a \cdot \alpha \cup \beta \cdot b$ - pentru disjuncția relațiilor $a \alpha b$ sau $a \beta b$.

Astfel încât, dacă a și b sunt propoziții, formula $a \cdot \supset \neq \cdot b$ înseamnă că „din a se deduce b ”, dar, „ b nu se deduce din a ”.

Iar, așa ceva reprezintă același lucru ca și cum s-ar spune că, a implică b și b nu implică a .”

Și totodată, definește conceptul de implicație strictă ($a \cdot \supset \neq \cdot b$) ceea ce înseamnă că, a implică b fără ca b să implice a .

Iar, această distincție este importantă în logica formală, unde implicația strictă - doar într-o direcție - este diferită de echivalență - implicație în ambele direcții.

Apoi:

„Formulae:”

Adică:

Formule:

Notăția originală	Interpretare contemporană
$a \supset b \cdot b \supset c \cdot a \neq c := \wedge$	Nu este posibil ca a să implice b , b să implice c și totuși a să nu implice c , întrucât așa ceva ar reprezenta o contradicție. $((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \wedge (a \not\rightarrow c)) = \emptyset$
$a = b \cdot b = c \cdot a \neq c := \wedge$	Nu este posibil ca a să fie egal cu b , b să fie egal cu c și totuși a să nu fie egal cu c , deoarece aceasta ar fi o contradicție. $((a = b) \wedge (b = c) \wedge (a \neq c)) = \emptyset$
$a \supset b \cdot b \supset \neq c : \supset \cdot a \supset \neq c$	Dacă a implică b și b implică faptul că b nu este egal cu c , atunci a implică faptul că a nu este egal cu c . $(a \rightarrow b) \wedge (b \neq c) \rightarrow (a \neq c)$
$a \supset \neq b \cdot b \supset c : \supset \cdot a \supset \neq c$	Dacă a implică faptul că a nu este egal cu b și b implică c , atunci a implică faptul că a nu este egal cu c . $a \rightarrow (a \neq b) \wedge (b \rightarrow c) \rightarrow (a \neq c)$

„Sed his notationibus raro utimur.”



Doar că, rareori folosim aceste notații..

Oricum, revenind:

„IV. De classibus.

Signo K significatur classis, sive entium aggregatio.

Signum ϵ significat est. Ita $a \in b$ legitur a est quoddam b; $a \in K$ significat a est quaedam classis; $a \in P$ significat a est quaedam propositio.

Loco $\neg(a \in b)$ scribemus $a - \epsilon b$; signum $- \epsilon$ significat non est; scilicet:”

IV. Despre clase.

Simbolul K reprezintă o clasă, adică o colecție de entități – ori o „mulțime” sau un „set”.

Simbolul ϵ înseamnă „este”. Astfel, expresia „ $a \in b$ ” se citește „a este un element al lui b”; „ $a \in K$ ” înseamnă „a este o clasă”; „ $a \in P$ ” înseamnă „a este o propoziție”.

În loc să scriem negația „ $\neg(a \in b)$ ” (adică „nu este adevărat că a este un element al lui b”) vom folosi notația „ $a - \epsilon b$ ”, unde „ $- \epsilon$ ” înseamnă „nu este”.

44.	$a - \epsilon b . = : - . a \epsilon b$	„a nu este un element al lui b” este echivalent cu faptul că „nu este adevărat că a este un element al lui b”. $(a \notin b) = \neg(a \in b)$
45.	Signum $a, b, c \in m$ significat: a, b et c sunt m; scilicet: $a, b, c \in m . = : a \in m . b \in m . c \in m$	Simbolul $a, b, c \in m$ înseamnă că a, b și c sunt elemente ale lui m; mai precis: A spune că, „a, b, c aparțin lui m” înseamnă că, a aparține lui m, b aparține lui m și c aparține lui m.” $a, b, c \in m . = : a \in m . b \in m . c \in m$
46.	Sit a classis; tunc $-a$ significatur classis indiviuis constituta quae non sunt a. $a \in K . \supset : x \epsilon -a . = . x - \epsilon a$	Fie a o clasă; atunci „ $-a$ ” denotă clasa formată din „tot ceea ce nu există în a”. Dacă a este o clasă, atunci x aparține complementului lui a este echivalent cu faptul că x nu aparține lui a.” Adică, dacă a este o clasă ($a \in K$) atunci un element x aparține complementului lui a ($-a$) dacă și numai dacă x nu aparține lui a



		$(x \notin a)$.
47.	Sint a, b classes; $a \cap b$, sive $a \cap b$, est classis individuis constituta quae eodem tempore sunt a et b; $a \cup b$ est classis individuis constituta qui sunt a vel b. $a, b \in K \cdot \supset \therefore a \cap b := \{x \in a \cdot x \in b\}$	Fie a și b clase; „$a \cap b$”, sau „$a \cap b$”, este clasa formată din „tot ceea ce este simultan în a și b”. Iar „$a \cup b$” este clasa formată din tot ceea ce este în a sau în b. Dacă a și b sunt clase, atunci x aparține intersecției lui a și b este echivalent cu faptul că x aparține lui a și x aparține lui b. Adică, un element x aparține clasei $a \cap b$ dacă și numai dacă x aparține ambelor clase a și b.
48.	$a, b \in K \cdot \supset \therefore a \cup b := \{x \in a \cdot x \in b\}$	Dacă a și b sunt clase, atunci x aparține reuniunii lui a și b este echivalent cu faptul că x aparține lui a sau x aparține lui b.” Adică, un element x aparține clasei $a \cup b$ dacă și numai dacă x aparține lui a sau x aparține lui b.
49.	Signum $\wedge$ indicat classem quae nullum continet individuum. Ita: $a \in K \cdot \supset \therefore a = \wedge := \{x \in a \cdot x = \wedge\}$ [Signo $\wedge$, quod classem ex omnibus individuis constitutam, de quibus quaestio est, indicat, non utimur].	Simbolul $\wedge$ (actualmente notat cu $\emptyset$) denotă clasa care nu conține nici un element. Dacă a este o clasă, atunci a este egală cu mulțimea vidă dacă și numai dacă nu există niciun x care să aparțină lui a.” Adică, o clasă a este o mulțime vidă ($\wedge$) (actualmente notată cu $\emptyset$) dacă și numai dacă nu există niciun element x care să aparțină lui a. Iar, „$x \in a \cdot x = \wedge$” înseamnă că afirmația „$x \in a$” este falsă pentru orice x (echivalență cu $\wedge$, falsul logic ori cu faptul că, de fapt, aparține $\emptyset$). [Nu folosim simbolul $\wedge$ pentru a denota clasa formată din toți indivizii despre care este vorba].” Adică, simbolul $\wedge$ nu este folosit pentru a denota universul (clasa tuturor indivizilor) ci doar pentru mulțimea vidă ($\emptyset$).



50.	Signum $\supset$ significat continetur. Ita $a \supset b$ significat classis a continetur in classi b. $a, b \in K . \supset \therefore a \supset b : = : x \in a . \supset x . x \in b$ [Formula $b \subset a$ semnificare potest classis b continet classem a; at signo $\subset$ non utimur]. Hic signa $\wedge$ et $\supset$ significationem habent quae paullo a praecedenti differt; sed nulla orietur ambiguitas. Nam si de propositionibus agatur, haec signa legantur absurdum et deducitur; si vero de classibus, nihil et continetur.	Simbolul $\supset$ înseamnă „este conținut”. Astfel, $a \supset b$ înseamnă că clasa a este conținută în clasa b. Adică, a este o subclasă a lui b (toate elementele lui a sunt și elemente ale lui b). De altfel același lucru cu ceea ce ar însemna – de fapt - incluziunea în teoria mulțimilor ($a \subseteq b$). Dacă a și b sunt clase, atunci a este conținut în b dacă și numai dacă, pentru orice x care aparține lui a, x aparține și lui b. [Formula $b \subset a$ ar putea însemna că clasa b conține clasa a; dar nu folosim simbolul $\subset$]. Adică, domnia sa subliniază că, o notație alternativă „$b \subset a$” ar putea fi folosită pentru a exprima incluziunea (b conține a) dar preferă să folosească „$a \supset b$” și evită simbolul „$\subset$” pentru a preveni confuziile. Aici, simbolurile $\wedge$ și $\supset$ au o semnificație care diferă ușor de cea anterioară, dar nu va apărea nicio ambiguitate. Când este vorba de propoziții, aceste simboluri se citesc „absurd” (fals) și „se deduce”; când este vorba de clase, ele se citesc „nihil” (mulțimea vidă) și „este conținut”. Cu alte cuvinte, domnul Peano clarifică utilizarea contextual interpretabilă a simbolurilor $\wedge$ și $\supset$. În logica propozițională, $\wedge$ înseamnă „fals” (absurd) iar $\supset$ înseamnă „implică” (se deduce). În teoria claselor, $\wedge$ înseamnă „mulțimea
-----	--	---

- 41 Precum abia sugeram, dacă A și B sunt mulțimi:
Dacă $A \subseteq B$, atunci A este o submulțime a lui B și A poate fi sau nu egal cu B .
Dar, dacă A este doar o submulțime a lui B , o putem scrie ca $A \subset B$.
Ori formal $\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$
Precum, spre exemplu:
 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ atunci $A \subseteq B$
Sau dacă:
 $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ atunci $A \subset B$



		vidă”, iar $\supset$ înseamnă „este conținut” (incluziune). Doar că – re-iterând - contextual, se poate determina interpretarea corespunzătoare ori corectă a tuturor acestora – astfel, cumva fiind imposibilă orice soi de ambiguitate.
51.	Formula $a = b$, si a et b sint classes, significat $a \supset b . b \supset a$. Itaque: $a, b \in K . \supset \therefore a = b : = : x \in a . = x . x \in b$ Propositiones 1 ... 41 quoque subsistunt, si $a, b \dots$ classes indicant; praeterea est:	Formula $a = b$, dacă a și b sunt clase, înseamnă că a este conținut în b și b este conținut în a. Astfel, dacă a și b sunt clase, atunci a este egal cu b dacă și numai dacă, pentru orice x, x aparține lui a este echivalent cu x aparține lui b.” Adică, egalitatea între clase ($a = b$) este definită ca incluziune bidirecțională ($a \subseteq b$ și $b \subseteq a$). Ceea ce înseamnă că a și b au exact aceleași elemente, ceea ce este echivalent cu definiția contemporană a egalității mulțimilor. Propozițiile de la aceea denotată cu 1 până la 41 rămân valabile și dacă $a, b \dots$ și așa mai departe denotă clase; și în plus, există: Adică, toate propozițiile anterioare (1–41) care inițial se aplicau propozițiilor logice sau altor entități, sunt valabile și în contextul claselor, datorită analogiilor dintre logica propozițională și teoria claselor. Și în plus:
52.	$a \in b . \supset . b \in K$	Dacă a aparține lui b, atunci b este o clasă. Adică: Dacă a este un element al lui b ($a \in b$) atunci b trebuie să fie o clasă ($b \in K$) dat fiind că, doar clasele pot conține elemente.
53.	$a \in b . \supset . b = \emptyset \wedge$	„Dacă a aparține lui b, atunci b nu este mulțimea vidă.” Adică: Dacă există un element a care aparține lui b, atunci b nu poate fi mulțimea vidă ($\emptyset$) întrucât, nu ar putea conține nici un element.



54.	$a \in b . b = c : \supset . a \in c$	Dacă a aparține lui b și b este egal cu c, atunci a aparține lui c. Adică, dacă a este un element al lui b și clasele b și c sunt egale ($b = c$) atunci a este și un element al lui c. Ceea ce reflectă proprietatea „egalității claselor”: Clasele egale au aceleași elemente.
55.	$a \in b . b \supset c : \supset . a \in c$	Dacă a aparține lui b și b este conținut în c, atunci a aparține lui c. Adică, dacă a este un element al lui b și b este o subclasă a lui c ($b \subseteq c$) atunci a este și un element al lui c. Ceea ce reflectă „tranzitivitatea incluziunii” în teoria mulțimilor.
56.	Sit s classis, et k classis quae in s contineatur; Tunc dicimus k esse individuum classis s, si k ex uno tantum constat individuo. Itaque: $s \in K . k \supset s : \supset :: k \in s . = \therefore k = \bigwedge : x, y \in k . \supset_{x,y} . x = y$	Fie s o clasă și k o clasă conținută în s. Spunem că k este un individ al clasei s dacă k consistă într-un singur individ. Astfel, dacă s este o clasă și k este conținut în s, atunci k aparține lui s este echivalent cu faptul că k nu este mulțimea vidă și, pentru orice x și y din k, x este egal cu y. Adică, se definește conceptul de „individ” (element singular) al unei clase. O clasă k este un individ al clasei s dacă: k este o subclasă a lui s ($k \supset s$); k conține exact un element (adică k nu este vidă, $k \neq \emptyset$ și orice două elemente x, y din k sunt identice, $x = y$). Iar, prin această formulă se sugerează că k aparține lui s ($k \in s$) dacă k este o clasă cu un singur element (un „individ”).

Oricum, revenind:

„V. De inversione.



Inversionis signum est [], eiusque usum in sequenti numero explicabimus.

Hic tantum casus particulares exponimus.

1. Sit a propositio, indeterminatum continens x ; tunc scriptura $[x] \in a$, quae legitur ea x quibus a , sive solutiones, vel radices conditionis a , classem significat individuis constitutam, quae conditioni a satisfaciunt.

Itaque:"

V. Despre inversiune.

Simbolul inversiunii este [], iar utilizarea sa va fi explicată în secțiunea următoare.

Aici prezentăm doar cazuri particulare.

1. Fie a o propoziție care conține o variabilă x . Atunci expresia $[x] \in a$, citită ca „acele x pentru care a este adevărată” sau „soluțiile ori rădăcinile condiției a ”, reprezintă clasa (mulțimea) formată din toate elementele care satisfac condiția a .”

Doar că - în acest context - „inversiunea” se referă la procesul de construire a tuturor valorilor unei variabile, care satisfac o anumită condiție logică sau matematică.

Notăția „ $[x] \in a$ ” este echivalentă cu ceea ce actualmente numim mulțimea soluțiilor unei ecuații sau condiții, precum spre exemplu, $\{x | a(x) \text{ este adevărat} \}$.

Așa încât, spre și mai specific exemplu:

Dacă a este propoziția „ $x^2 = 4$ ”, atunci „ $[x] \in a$ ” reprezintă clasa $\{x | x^2 = 4\}$, adică mulțimea $\{2, -2\}$, întrucât, doar acestea sunt valorile lui x care satisfac condiția.

Și astfel:

57.	$a \in P . \supset : [x \in] a . \in K$	Dacă a este o propoziție, atunci clasa tuturor x care satisfac a este o clasă. Adică, dacă a este o propoziție ($a \in P$) atunci mulțimea soluțiilor lui a (adică $\{x a(x)\}$) este o clasă, adică aparține categoriei claselor (K). Cu alte cuvinte, operația de inversiune aplicată unei propoziții produce o clasă validă.
58.	$a \in K . \supset \therefore [x \in] . x \in a : = a$	Dacă a este o clasă, atunci clasa tuturor x care aparțin lui a este egală cu a.



		Adică, dacă a este o clasă ($a \in K$) atunci mulțimea soluțiilor propoziției „$x \in a$” (adică $\{x x \in a\}$) este chiar clasa a. Ceea subliniază faptul că: „$\{x x \in a\}$” returnează exact elementele lui a, deci este identică cu a.
59.	$a \in P. \supset \therefore x \in . [x \in] a : = a$	Dacă a este o propoziție, atunci x aparține clasei soluțiilor lui a este echivalent cu faptul că a este adevărat pentru x. Adică, dacă a este o propoziție ($a \in P$) atunci afirmația „$x \in [x \in] a$” (x aparține mulțimii soluțiilor lui a) este echivalentă cu propoziția a însăși (adică $a(x)$ este adevărat). Și astfel, domnia sa clarifică relația dintre apartenența la clasa soluțiilor și valoarea de adevăr a propoziției.
60.	Sint α, β propositiones indeterminatum continentes x; erit: $[x \in] (\alpha \beta) = ([x \in] \alpha) ([x \in] \beta)$	Fie α și β propoziții care conțin variabila x; atunci clasa soluțiilor lui α și β este egală cu intersecția claselor soluțiilor lui α și β. Adică, dacă α și β sunt propoziții dependente de x, atunci mulțimea soluțiilor conjuncției „$\alpha \beta$” (adică $\{x \alpha(x) \wedge \beta(x)\}$) este egală cu intersecția mulțimilor soluțiilor individuale, „$[x \in] \alpha \cap [x \in] \beta$” (adică $\{x \alpha(x)\} \cap \{x \beta(x)\}$). Ceea ce reflectă „distributivitatea intersecției peste soluții”.
61.	$[x \in] - \alpha = - [x \in] \alpha$	Clasa soluțiilor negației lui α este egală cu complementul clasei soluțiilor lui α. Adică, mulțimea soluțiilor propoziției „$-\alpha$” (adică $\{x \neg \alpha(x)\}$) este egală cu complementul mulțimii soluțiilor lui α (adică complementul lui $\{x \alpha(x)\}$). Ceea ce reprezintă – pur și simplu - „legea complementului în contextul soluțiilor”.
62.	$[x \in] (\alpha \cup \beta) = [x \in] \alpha \cup [x \in] \beta$	Clasa soluțiilor lui α sau β este egală cu reuniunea claselor soluțiilor lui α și β. Adică, mulțimea soluțiilor disjuncției „$\alpha \cup$



		β” (adică $\{x \mid \alpha(x) \cup \beta(x)\}$) este egală cu reuniunea mulțimilor soluțiilor individuale, „$[x \in \alpha] \cup [x \in \beta]$” (adică $\{x \mid \alpha(x)\} \cup \{x \mid \beta(x)\}$). Ceea ce – pur și simplu - reflectă distributivitatea reuniunii peste soluții.
63.	$\alpha \supset_x \beta . = . [x \in] \alpha \supset [x \in] \beta$	Dacă α implică β pentru toate x, atunci clasa soluțiilor lui α este conținută în clasa soluțiilor lui β. Adică, dacă propoziția $\alpha(x)$ implică propoziția $\beta(x)$ pentru orice x (notat „$\alpha \supset_x \beta$”) atunci mulțimea soluțiilor lui α ($\{x \mid \alpha(x)\}$) este o subclasă a mulțimii soluțiilor lui β ($\{x \mid \beta(x)\}$). Domnia sa subliniind – astfel - faptul că, implicația propozițiilor „se traduce” în incluziunea claselor soluțiilor lor.
64.	$\alpha =_x \beta . = . [x \in] \alpha = [x \in] \beta$	Dacă α este echivalent cu β pentru toate x, atunci clasa soluțiilor lui α este egală cu clasa soluțiilor lui β. Adică, dacă propozițiile $\alpha(x)$ și $\beta(x)$ sunt echivalente pentru orice x (notat „$\alpha =_x \beta$”) atunci mulțimea soluțiilor lui α ($\{x \mid \alpha(x)\}$) este egală cu mulțimea soluțiilor lui β ($\{x \mid \beta(x)\}$). Ceea ce înseamnă că, echivalența propozițiilor implică egalitatea claselor soluțiilor lor.

„2. Sint x, y entia quacumque; system ex ente x et ex ente y compositum ut novum ens consideramus, et signo (x, y) indicamus; similiterque si entium numerus maior fit. Sit α propositio indeterminata continens x, y ; tunc $[(x, y) \in] \alpha$ significat classem entibus (x, y) constitutam, quae conditioni α satisfaciunt.

Erit:”

2. Fie x și y entități entități oarecare; considerăm perechea formată din x și y ca o nouă entitate și o notăm cu (x, y) ; același principiu se aplică dacă sunt mai multe entități. Fie α o propoziție care conține variabilele x și y ; atunci „ $[(x, y) \in] \alpha$ ” reprezintă mulțimea tuturor perechilor (x, y) care satisfac condiția α .

Și atunci:

65.	$\alpha \supset_{x,y} \beta . = . [(x, y) \in] \alpha \supset [(x, y) \in] \beta$	Dacă α implică β pentru toate x și y , atunci mulțimea perechilor (x, y) care satisfac α este
-----	---	---



		conținută în mulțimea perechilor (x, y) care satisfac β .
66.	$[(x, y) \in \alpha] \rightarrow \neg \wedge . = \therefore [x \in] . [y \in \alpha] \rightarrow \neg \wedge : \neg = \wedge$	Mulțimea perechilor (x, y) care satisfac α nu este mulțimea vidă dacă și numai dacă există x și y astfel încât α să fie adevărată.”

Doar că, propunerea perechilor ordonate (x, y) ca un soi de „noi entitate” reprezintă o contribuția domnului Peano, prin care se permite formalizarea relațiilor și funcțiilor - adică a regulilor prin care se transformă elementele dintr-o mulțime într-un rezultat - în termeni definibili ca „clase de perechi”.

Iar, prin notația „ $[(x, y) \in \alpha]$ ” se generalizează conceptul de inversiune („ $[x \in a]$ ”) pentru condiții cu mai multe variabile, definind mulțimea soluțiilor ca o clasă de perechi ordonate.

Spre exemplu, dacă α este „ $x + y = 5$ ”, atunci „ $[(x, y) \in \alpha]$ ” este mulțimea $\{(x, y) | x + y = 5\}$

Așa încât, definirea perechii (x, y) ca entitate permite formalizarea relațiilor și a funcțiilor - adică o regulilor care transformă elementele dintr-o mulțime într-un rezultat - în teoria mulțimilor și totodată, definirea claselor de soluții pentru condiții cu mai multe variabile.

În timp ce:

Prin propoziția 65, domnia sa extinde ideea de incluziune a claselor soluțiilor - din propoziția 63 - la „cazul” propozițiilor cu două variabile. Ceea ce este - de fapt - o generalizare a implicației în contextul perechilor.

Spre exemplu:

Dacă $\alpha(x, y)$ este „ $x + y = 2$ ” și $\beta(x, y)$ este „ $x + y \geq 1$ ”, atunci α implică β (întrucât $x + y = 2$ implică $x + y \geq 1$).

Și astfel, mulțimea perechilor $\{(x, y) | x + y = 2\}$ este conținută în $\{(x, y) | x + y \geq 1\}$.

Prin propoziția 66, domnia sa stabilește o condiție de existență pentru soluții, legând non-viditatea mulțimii perechilor soluții de existența cel puțin unei perechi (x, y) care satisface condiția.

Spre exemplu:

Pentru $\alpha(x, y) = „x + y = 2”$, mulțimea $\{(x, y) | x + y = 2\}$ nu este vidă (de exemplu, $(1, 1)$ satisface condiția). Ceea ce este același lucru ca și atunci când s-ar clama existența unui x (de exemplu, $x = 1$) pentru care există un y (de exemplu, $y = 1$) astfel încât $x + y = 2$.

„3. Sit $x \alpha y$ relatio inter indeterminata x et y (ex. g. in logica relationes $x = y$, $x \neq y$, $x \supset y$; in arithmetica $x < y$, $x > y$, etc). Tunc signo $[\epsilon \alpha]$ y ea x indicamus, quae relationi $x \alpha y$ satisfaciunt. commoditatis causa, loco $[\epsilon]$, signo utimur. Ita $\exists \alpha y . = : [x \in] . x \alpha y$, et signum $\exists$ legitur qui, vel quae.



Ex. gr. sit y numerus; tunc $\exists < y$ classem indicat numeris x compositam qui conditioni $x < y$ satisfaciunt, scilicet, qui sunt minores y , vel simpliciter minores y .

Similiter, quum signum D significet dividit, vel est divisor, formula $\exists D$ significat qui dividunt vel divisores.

Deducitur $x \in \alpha y = x \alpha y$.”

3. Fie $x \alpha y$ o relație între variabilele x și y (de exemplu, în logică: $x = y$, x nu este egal cu y , x implică y ; în aritmetică: $x < y$, $x > y$, etc.). Atunci, prin notația „ $\epsilon \alpha$ ” y ”, indicăm mulțimea tuturor x care satisfac relația $x \alpha y$.

Pentru comoditate, în loc de „ ϵ ”, folosim simbolul „ $\exists$ ”. Astfel, „ $\exists \alpha y$ ” este echivalent cu mulțimea $\{x | x \alpha y\}$, iar simbolul $\exists$ se citește „care”.

De exemplu, fie y un număr; atunci $\exists < y$ reprezintă mulțimea numerelor x care satisfac condiția $x < y$, adică toate numerele mai mici decât y .

În mod similar, deoarece simbolul D înseamnă „divide” sau „este divisor”, $\exists D y$ indică mulțimea divizorilor lui y .

Se deduce că x aparține mulțimii $\exists \alpha y$ dacă și numai dacă x satisface relația $x \alpha y$.

Așa încât, notația $\exists \alpha y$ reprezintă o extensie a conceptului de inversiune (abia propus prin „ $[x \in] a$ ”) la relații binare. Doar că, în loc să definească soluțiile unei propoziții generale, se definesc soluțiile unei relații $x \alpha y$ pentru un y fix, rezultând o clasă de x -uri.

Precum spre exemplu:

Pentru $\alpha = „<”$ și $y = 5$, „ $\exists < 5$ ” este $\{x | x < 5\}$, adică toate numerele reale mai mici decât 5.

Pentru $\alpha = „D”$ și $y = 6$, „ $\exists D 6$ ” este $\{1, 2, 3, 6\}$, divizorii lui 6.

Și mai mult chiar, notația „ $\exists \alpha y$ ” este flexibilă și se aplică oricărei relații binare α , fie ea logică (egalitate, implicație) sau aritmetică (inegalități, divizibilitate).

Iar, propoziția „ $x \in \exists \alpha y = x \alpha y$ ” confirmă că apartenența la clasa definită de relația α este echivalentă cu satisfacerea relației însăși, ceea ce reprezintă o proprietate „definitorie” a operației de inversiune.

„4. Sit α formula indeterminate continens x . Tunc scriptura $x' [x]\alpha$, quae legitur x' loco x in α substituto, formulam indicat quae obtinetur si in α , loco x , x' legimus.

Deducitur $x[x]\alpha = \alpha$.”

4. Fie α o formulă care conține variabila x . Atunci notația $x' [x]\alpha$, citită ca “ x' înlocuit în locul lui x în α ”, reprezintă formula obținută prin înlocuirea lui x cu x' în α .

Se deduce că, dacă x este înlocuit cu el însuși în α , formula rămâne neschimbată, adică $x [x]\alpha$ este egal cu α .

Așa încât, în acest paragraf domnia sa prezintă conceptul formal de substituție a variabilelor într-o formulă logică sau matematică.



Iar, notația „ $x' [x]\alpha$ ” reprezintă – de fapt - o modalitate de a exprima rezultatul înlocuirii variabilei x cu x' în formula α .

Spre exemplu „substituția cu o constantă”:

Dacă $\alpha = „x + 2 = 5”$.

Și $x' = 3$.

Atunci „ $3 [x] (x + 2 = 5)$ ” înseamnă că înlocuim x cu 3.

Iar, $x + 2$ devine $3 + 2 = 5$.

Și ceea ce rezultă este „ $5 = 5$ ” (o propoziție adevărată).

Sau „confirmarea proprietății”: $x [x]\alpha = \alpha$

Dacă, $x' = x$.

Și în continuare: $\alpha = „x + 2 = 5”$.

Atunci $x' [x]\alpha$ prin înlocuirea lui x' cu x s-ar transforma tocmai în α însuși, adică „ $x + 2 = 5$ ”, ceea ce ar confirma „proprietatea” că, de fapt: $x [x]\alpha = \alpha$.

Doar că indiferent cât de trivială ar părea, aceasta este o proprietate fundamentală în logica matematică, utilizată pentru a formaliza transformările și deducțiile în „sistemele peano- formalizate”. Iar „proprietatea” ($x [x]\alpha = \alpha$) reprezintă o tautologie care subliniază consistența operației de substituție: înlocuirea unei variabile cu ea însăși nu modifică formula.

„5. Sit α formula, quae indeterminata $x, y \dots$ continet. Tunc $(x' y' \dots) [x, y \dots] \alpha$, quae legitur $x' y' \dots$ loco $x, y \dots$ in α substitutis, formulam indicat quae obtinetur si in α loco $x, y \dots$ litterae $x' y' \dots$ scribantur. deducitur $(x, y) [x, y] \alpha = \alpha$.

Logicae notationes quae praecedunt exprimendae cuilibet arithmeticae propositioni sufficienti, iisdemque tantum utimur. hic notationes alias nonnullas bre $\wedge$ iter explicamus, quae utiles fieri possunt.

Sit s quaedam classis; supponimus aequalitatem inter entia systematis s definitam, quae conditionibus satisfaciatur:”

$a = a$
$a = b \cdot \cdot b = a$
$a = b \cdot b = c : \supset a = c$

5. Fie α o formulă care conține variabilele $x, y \dots$ Atunci $(x', y' \dots) [x, y \dots] \alpha$, citită ca ' $x', y' \dots$ înlocuite în locul lui $x, y \dots$ în α ', reprezintă formula obținută prin înlocuirea simultană a lui $x, y \dots$ cu $x', y' \dots$ Se deduce că înlocuirea lui x, y cu ele însele lasă formula neschimbată: $(x, y) [x, y] \alpha = \alpha$.

Notațiile logice prezentate anterior sunt suficiente pentru orice propoziție aritmetică și le folosim doar pe acestea. Aici explicăm pe scurt alte notații utile.

Fie s o clasă; presupunem că egalitatea între entitățile din s satisface:



a este egal cu a.	Dacă $a = b$, atunci $b = a$.
	Dacă $a = b$ și $b = c$, atunci $a = c$.

„Sit ϕ signum, sive signorum aggregatus, ita ut si x est ens classis s , scriptura ϕx novum indicet ens; supponimus quoque aequalitatem inter entia ϕx definitam; et si x et y sunt entia classis s , et est $x = y$, supponimus deduci posse $\phi x = \phi y$. Tunc signum ϕ dicitur esse functionis praesignum in classi s , et scribemus $\phi \ni F' s$.”

Deci:

Fie ϕ un simbol, sau un ansamblu de simboluri, astfel încât, dacă x este o entitate a clasei s , expresia ϕx să indice o nouă entitate; presupunem, de asemenea, că egalitatea între entitățile ϕx este definită; și dacă x și y sunt entități ale clasei s și $x = y$, presupunem că se poate deduce $\phi x = \phi y$. Atunci simbolul ϕ este numit pre-simbol al unei funcții în clasa s și vom nota „ $\phi \ni F' s$ ”.

În acest domniul Peano descrie conceptul de funcție - adică o regulă care transformă elementele dintr-o mulțime într-un rezultat - într-un mod formal, folosind limbajul propriu logic.

De fapt, într-o perspectivă ceva mai expresivă, asociată acestui context:

O funcție este o relație care asociază fiecărui element dintr-o „mulțime” – „set” sau „clasă” de elemente - numită „domeniu” un singur element dintr-o altă – ori posibil din aceeași – mulțime, „set” sau „clasă” de elemente, numită „codomeniu” – ori cu alte cuvinte, ceva mai expresiv spus „celălalt domeniu”.

Sau – cu alte cuvinte - o regulă prin care se transformă elementele dintr-o mulțime într-un „rezultat”.

Iar „imaginea” reprezintă partea din codomeniu care este efectiv „asociată”.

Imaginea – desigur - nu reprezintă toate elementele din codomeniu, întrucât nu întotdeauna chiar toate acestea trebuie să fie folosite de funcție, ci doar o parte din ele.

Iar, partea aceea care chiar este „asociată” formează „imaginea”.

Dar – asupra acestui concept - voi reveni.

Așa încât – revenind - ϕ reprezintă o funcție care aplică o transformare asupra elementelor clasei s , iar proprietatea esențială este că păstrează egalitatea: dacă două elemente x și y din clasa s sunt egale, atunci și rezultatele funcției ϕx și ϕy sunt egale.

Iar, prin „ $\phi F' s$ ” se indică faptul că, ϕ este un simbol al unei funcții definite pe clasa s .

Logic – formal, adică:

Notăția originală	Interpretare contemporană
$s \ni K . \cap :: \phi F' s . = . \therefore x, y \in s . x = y : \exists x, y . \phi x = \phi y$	Pentru orice clasă s care aparține mulțimii claselor K , ϕ este un pre-simbol al unei funcții în clasa s dacă și numai dacă, pentru orice x și y din s ,



dacă $x = y$, atunci $\phi x = \phi y$.

Asa încât, prin această „formulă” formal exprimă proprietatea fundamentală a unei funcții: dacă două intrări sunt egale, rezultatele lor trebuie să fie egale, ceea ce este o condiție necesară pentru ca ϕ să fie considerată o funcție pe clasa s .

De fapt, domnul Peano descrie o funcție ϕ care operează pe o clasă s - o mulțime de entități - și care respectă proprietatea că, dacă $x = y$ - două elemente din s sunt egale - atunci $\phi x = \phi y$. Adică, rezultatele aplicării lui ϕ pe x și y sunt egale.

Iar, aceasta este o proprietate esențială a funcțiilor - adică a regulilor prin care se transformă elementele dintr-o mulțime într-un rezultat - care trebuie să fie „bine definite” în sensul că „elementele identice” produc „rezultate identice”.

Cu alte cuvinte - spre exemplu - să presupunem că:

Clasa s este mulțimea numerelor reale pozitive, adică $s = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Simbolul ϕ reprezintă funcția „pătratul unui număr”, adică $\phi x = x^2$.

Acum, verificăm dacă ϕ - „funcția ridicare la pătrat” - satisface condițiile propuse de către domnul Peano pentru a fi un „pre-simbol al unei funcții” în clasa s :

Condiția 1: ϕx produce o entitate nouă.

Dacă $x \in s$, de exemplu $x = 2$, atunci $\phi x = \phi(2) = 2^2 = 4$, care este o entitate - un număr real. Pentru orice $x \in s$, $\phi x = x^2$ este bine definit și produce o valoare - o altă entitate.

Condiția 2: Identitatea este definită între entitățile ϕx .

Rezultatele funcției ϕx sunt numere reale, iar identitatea între numere reale este bine definită (de exemplu, $4 = 4$, $9 = 9$ și desigur, tot așa mai departe).

Condiția 3: Dacă $x = y$ în s , atunci $\phi x = \phi y$.

Să considerăm $x, y \in s$ astfel încât $x = y$. Spre exemplu, fie $x = 3$ și $y = 3$.

Atunci:

$$\phi x = \phi(3) = 3^2 = 9,$$

$$\phi y = \phi(3) = 3^2 = 9.$$

Cum $x = y$, rezultă $\phi x = \phi y$, adică $9 = 9$.

Iar, cum așa ceva reprezintă un adevăr pentru orice $x, y \in s$ (dacă $x = y$, atunci $x^2 = y^2$, deci $\phi x = \phi y$) funcția $\phi x = x^2$ satisface toate condițiile peanoiene, deci este un „pre-simbol al unei funcții” în clasa s - numerele reale pozitive.

Și putem nota $\phi \in F's$, adică ϕ este o funcție definită pe s .



Sau – spre contra-exemplu - să presupunem că ϕ nu este o funcție bine definită.

De exemplu, dacă ϕx ar returna „ultima cifră a lui x ” într-un mod ambiguu ori aleatoriu – adică, pur și simplu: fără a specifica nici o „regulă” - atunci ar putea încălca proprietatea $x = y \rightarrow \phi x = \phi y$.

Dar, în cazul „funcției ridicare la pătrat”, această proprietate este respectată.

„Verum si, cum sit x quodlibet ens classis s , scriptura $x\phi$ novum indicet ens, et, ex, $x = y$ deducitur $x\phi = y\phi$, tunc dicimus ϕ esse functionis postsignum in classi s et scribemus $\phi \in s'F$.”

Notăția originală	Interpretare contemporană
$s \in K . \mathcal{O}:: \phi s'F . = \therefore x, y \in s . x = y : \mathcal{O}x, y . x\phi = y\phi$	Dacă s aparține lui K , atunci: Pentru orice x, y din s , dacă $x = y$, atunci $x\phi = y\phi$

Dar dacă, pentru orice entitate x din clasa s , expresia $x\phi$ produce o entitate nouă și dacă din $x = y$ rezultă că $x\phi = y\phi$, atunci spunem că ϕ este un simbol postfix al unei funcții pe clasa s , notat $\phi \in s'F$.

Dacă s este o clasă, atunci ϕ este un simbol postfix al unei funcții pe s dacă și numai dacă, pentru orice x și y din s , dacă x este egal cu y , atunci $x\phi$ este egal cu $y\phi$.

De fapt, în fragmentul anterior (cu „ $\phi F' s$ ”) domnul Peano a definit o funcție folosind notația prefix (ϕx , unde ϕ este scris înaintea argumentului x).

Doar că, acum propune notația postfix ($x\phi$, unde ϕ este scris după x).

Desigur, proprietățile acesteia rămân aceleași (produce o entitate nouă și respectă egalitatea) doar că, acest soi de formalism, prin schimbarea notației reflectă flexibilitatea sistemului logic astfel definit.

Spre exemplu, fie s mulțimea numerelor reale și ϕ operația „ridicare la pătrat” în notație postfix, astfel încât $x\phi = x^2$.

Dacă $x = y = 3$, atunci $x\phi = 3^2 = 9$ și $y\phi = 3^2 = 9$, deci $x\phi = y\phi$.

Iar, așa ceva confirmă că, ϕ (“pătratul”) este o funcție pe s , notată $\phi \in s'F$.

Doar că, notația postfix ($x\phi$) este mai puțin obișnuită în matematica modernă, unde se preferă notația prefix ($f(x)$).

Totuși – cel puțin aparent – domnul Peano o propune pentru a arăta că ordinea simbolurilor nu afectează proprietățile esențiale ale unei funcții.

De fapt:

„Exempla. Sit a numerus; tunc $a +$ est functionis praesignum in numerorum classe, et $+$ a est functionis postsignum; quicumque enim est numerus x , formulae $a + x$ et $x + a$ no $\wedge$ os indicant numeros, et ex $x = y$ deducitur $a + x = a + y$, et $x + a = y + a$.

Itaque:”

Considerând chiar exemplul propus de către domnia sa:



Fie a un număr; atunci „ $a +$ ” este un pre-simbol al unei funcții în clasa numerelor, iar „ $+ a$ ” este un post-simbol al unei funcții; căci, oricare ar fi numărul x , expresiile „ $a + x$ ” și „ $x + a$ ” indică numere noi; și din $x = y$ se deduce că $a + x = a + y$, precum și $x + a = y + a$.

Prin urmare:

Dacă a este un număr natural, atunci „ $a +$ ” aparține pre-simbolurilor funcțiilor definite pe clasa numerelor naturale.

Dacă a este un număr natural, atunci „ $+ a$ ” aparține post-simbolurilor funcțiilor definite pe clasa numerelor naturale.

Cu alte cuvinte, domnul Peano în acest paragraf descrie proprietățile operației de adunare ca o funcție în contextul numerelor naturale (clasa „ N ”). Și folosește termenii „pre-simbol” și „post-simbol” pentru a indica poziția numărului „ a ” în raport cu operația de adunare:

Pre-simbolul ($a +$): Înseamnă funcția care ia un număr x și returnează „ $a + x$ ” (adică adună a la x).

Post-simbolul ($+ a$): Înseamnă funcția care ia un număr x și returnează „ $x + a$ ” (adică adună x la a).

Ori formal:

Notăția originală	Interpretare contemporană
$a \in N : \exists : a + . \in . F' N$	Dacă a este un număr natural, atunci operația „$a +$” este un pre-simbol al unei funcții definite pe clasa numerelor naturale. Adică, pentru orice număr natural a, funcția care adună a la orice alt număr natural x (adică „$a + x$”) este o funcție validă pe mulțimea numerelor naturale, întrucât produce un rezultat bine definit și respectă proprietatea că, dacă $x = y$, atunci $a + x = a + y$.
$a \in N : \exists : + a . \in . N' F$	Dacă a este un număr natural, atunci operația „$+ a$” este un post-simbol al unei funcții definite pe clasa numerelor naturale. Adică, funcția care adună orice număr natural x la a („$x + a$”) este, de asemenea, o funcție validă pe mulțimea numerelor naturale, întrucât produce un rezultat bine definit și respectă proprietatea că, dacă $x = y$, atunci $x + a = y + a$.

Ori - spre exemplu „exemplului”:

Să considerăm un număr natural - de exemplu 3 - și mulțimea numerelor naturale (1, 2, 3 ...).

Pentru „ $a +$ ” (pre-simbol):



Operația „3 +” înseamnă să adunăm 3 la orice număr din mulțimea numerelor naturale:

Dacă luăm numărul 2, rezultatul este $3 + 2 = 5$.

Dacă luăm numărul 4, rezultatul este $3 + 4 = 7$.

Dacă două numere sunt egale, de exemplu 2 și 2, atunci $3 + 2 = 5$ și $3 + 2 = 5$, deci rezultatele sunt egale.

Așa încât, operația „3 +” este o funcție validă.

Pentru „+ a” (post-simbol):

Operația „+ 3” înseamnă să adunăm orice număr la 3:

Dacă luăm numărul 2, rezultatul este $2 + 3 = 5$.

Dacă luăm numărul 4, rezultatul este $4 + 3 = 7$.

Dacă două numere sunt egale, de exemplu 2 și 2, atunci $2 + 3 = 5$ și $2 + 3 = 5$, deci rezultatele sunt egale.

Așa încât, operația „+ 3” este o funcție validă.

„Sit ϕ functionis praesignum in classe s. Tunc $[\phi]y$ classem significat iis x constitutam, quae conditioni $\phi x = y$ satisfaciunt; scilicet:”

Fie ϕ o funcție definită pe clasa s. Atunci $[\phi]y$ denotă clasa formată din acele x care satisfac condiția $\phi(x) = y$; mai precis:

Notăția originală		Interpretare contemporană
Def.	$s \in K . \phi \in F' s : \supset: [\phi]y . = . [x \in] (\phi x = y)$	Dacă $s \in K$ și $\phi \in F's$, atunci: $[\phi]y = \{x \in s \phi(x) = y\}$.

“Classis $[\phi]y$ vel unum vel plura, vel etiam nullum individuum continere potest. Erit:”

Clasa $[\phi]y$ poate conține fie un singur element, fie mai multe elemente, fie niciun element. Mai precis:

Notăția originală		Interpretare contemporană
$s \in K . \phi \in F' s : \supset: y = \phi x . = . x \in [\phi]y$		Dacă $s \in K$ și $\phi \in F's$, atunci: $y = \phi(x)$ este echivalent cu $x \in [\phi]y$.

În limbaj matematic contemporan, această afirmație este echivalentă cu definirea imaginii inverse a unei funcții. Clasa $[\phi]y$ este mulțimea $\{x \in s | \phi(x) = y\}$, iar relația $y = \phi(x) \leftrightarrow x \in [\phi]y$ descrie exact această proprietate. Textul subliniază că această clasă poate fi vidă, unică sau multiplă, în funcție de natura funcției ϕ .

“Si vero ϕy uno tantum constat individuo, erit $y = \phi x . = . x = [\phi]y$
Sit ϕ functions postsignum; similiter ponimus:”



Dacă clasa $[\phi]y$ conține exact un singur element, atunci $y = \phi(x)$ este echivalent cu $x = [\phi]y$.
Fie ϕ o funcție inversă; în mod similar, stabilim:

Notăția originală	Interpretare contemporană
$s \in K . \phi \in s' F : \supset \therefore y [\phi] = [x \in] (x\phi = y)$	Dacă $s \in K$ și $\phi \in F$'s, atunci: $[\phi]y = \{x \in s x\phi = y\}$.

Pentru prima parte, dacă $[\phi]y = \{x\}$ (un „singleton”, o mulțime care conține exact un singur element, în acest caz, conține un singur x astfel încât $\phi(x) = y$) atunci $y = \phi(x) \leftrightarrow x$ este unicul element din $[\phi]y$.

Pentru a doua parte, definiția cu funcția inversă se traduce astfel: $[\phi]y = \{x \in s | \phi^{-1}(x) = y\}$, unde ϕ^{-1} este funcția inversă a lui ϕ . Aceasta implică o simetrie între funcția directă și cea inversă, iar notația „ $x\phi = y$ ” este echivalentă cu $\phi^{-1}(x) = y$.

„Signum [] dicitur inversionis signum, eiusque usus nonullos in logica iam exposuimus. nam si α est propositio indeterminatum continens x , atque A est classis individuus x composita quae conditioni α satisfaciunt, erit $x \in a . = \alpha$, tunc $a = [x \in] \alpha$, ut in V , i.”

Simbolul [] se numește simbolul inversiunii, iar utilizarea sa logică, a fost deja explicată.

De exemplu, dacă α este o afirmație care conține variabila x , iar A este mulțimea formată din toate elementele x care îndeplinesc afirmația α , atunci x aparține mulțimii A dacă și numai dacă α este adevărat. Astfel, A este mulțimea $[x] \alpha$, conform secțiunii V , i.

Doar că, de fapt, în acest paragraf domnul Peano promovează o funcția notată cu ϕ , care poate fi aplicată în două moduri:

Ca „pre-simbol” (scris ϕx) unde ϕ este aplicat înainte de elementul x – precum spre exemplu, ca „dublarea lui x ” sau ca „adunarea unui număr la x ” ori oricum altfel.

Ca „post-simbol” (scris $x\phi$) unde ϕ este aplicat după elementul x – precum spre exemplu „ x plus un număr”.

„Inversiunea” ($[\phi]y$ sau $y [\phi]$) înseamnă construirea tuturor elementelor x care, prin aplicarea lui ϕ , dau rezultatul y . Iar, dacă această mulțime are un singur element, inversiunea devine o „funcție inversă”.

Cu alte cuvinte - folosind un „limbaj actualizat” - dacă se știe că $f(\text{ceva}) = x$, ce modalitate ar putea exista pentru a se determina „ce era acel «ceva» știindu-se că « $f(\text{ceva}) = x$ »”.

Sau – ceva mai formal, dar cu alte cuvinte – ar trebui să se găsească $g(f(x)) = x$.

Deci, revenind:

Spre exemplu pentru „pre-simbol” – (ϕx) .

Să presupunem că ϕ este „înmulțirea cu 3” aplicată înainte de x (adică $\phi x = 3$ înmulțit cu x).

Așa încât, așa ceva reprezintă o funcție pre-simbol, pentru că ϕ (înmulțirea cu 3) este scrisă înainte de x .



Iar, dacă s-ar dori să se găsească mulțimea $[\phi]6$, adică toate numerele x din numerele naturale pentru care ϕ aplicat pe x este 6:

$$\phi x = 3 \times x = 6.$$

$$3 \times 2 = 6, \text{ deci } x = 2$$

Și niciun alt număr natural x nu satisface condiția (întrucât, $3 \times 1 = 3$, $3 \times 3 = 9$).

Deci, mulțimea $[\phi]6$ conține doar un singur număr – ori „element” – adică: 2.

Și întrucât $[\phi]6$ are un singur element, funcția ϕ are o „funcție inversă” pentru $y = 6$, care este reprezentată de „împărțirea la 3” ($6 \div 3 = 2$).

Sau spre - alt - exemplu pentru post-simbol ($x\phi$).

Să presupunem că, de această dată, ϕ este „înmulțirea cu 3” dar, aplicată după x (adică $x\phi = x$ înmulțit cu 3).

Așa încât, aceasta este o funcție post-simbol, pentru că ϕ – adică înmulțirea cu 3 - este scrisă după x .

Iar, dacă s-ar dori să se găsească mulțimea $6[\phi]$, adică toate numerele x din numerele naturale pentru care x combinat cu ϕ este 6:

$$x\phi = x \times 3 = 6.$$

$$2 \times 3 = 6, \text{ deci } x = 2.$$

Și – tot - niciun alt număr natural x nu satisface condiția (întrucât, $1 \times 3 = 3$, $3 \times 3 = 9$).

Deci, mulțimea $6[\phi]$ conține doar 2.

Și întrucât $6[\phi]$ are un singur element, funcția ϕ are o funcție inversă pentru $y = 6$, care este - tot - „împărțirea la 3” ($6 \div 3 = 2$).

Sau – spre un cu totul și cu totul alt exemplu, în care se folosește o „funcție necomutativă”, precum ar fi „concatenarea șirurilor de caractere” - pentru a evidenția mai expresiv distincția.

Să considerăm mulțimea șirurilor de caractere formate din litere (precum spre exemplu, „a”, „b”, „c” ...).

Pentru „pre-simbol” – (ϕx):

Să presupunem că ϕ este „adăugarea literei «p» înaintea șirului x ” (adică $\phi x = „p”$ concatenat cu x). Spre exemplu, dacă x este „a”, atunci $\phi x = „pa”$.

Iar, aceasta este o „funcție pre-simbol”, pentru că ϕ (adăugarea „p”) este aplicată înainte de x .

Iar, dacă s-ar dori să se găsească mulțimea $[\phi]„pa”$:



$\phi x = „p”$ concatenat cu $x = „pa”$.

Iar, x trebuie să fie „a”, întrucât „p” adăugat la „a” = „pa”.

Și – desigur - niciun alt șir x nu satisface condiția (întrucât, „p” adăugat la „b” = „pb” ... p” adăugat la „c” = „pc” ... și așa mai departe).

Deci, mulțimea $[\phi], „pa”$ conține doar „a”.

Întrucât $[\phi], „pa”$ are un singur element, funcția ϕ are o funcție inversă pentru $y = „pa”$, care este „eliminarea literei ‘p’ de la început” (adică, pur și simplu: „a”, întrucât în acest caz, „pa” $\rightarrow$ „a”).

Pentru „post-simbol” - $(x\phi)$:

Să presupunem că ϕ este „adăugarea literei «p» dar, de această dată, după șirul x ” (adică $x\phi = x$ concatenat cu „p”). Spre exemplu, dacă x este „a”, atunci $x\phi = „ap”$.

Iar, aceasta este o funcție post-simbol, pentru că ϕ este aplicată după x .

Iar, dacă s-ar dori să se găsească mulțimea „ap” $[\phi]$:

$x\phi = x$ concatenat cu „p” = „ap”.

Iar, x trebuie să fie „a”, întrucât „a” adăugat la „p” = „ap”.

Și – desigur – nici un alt șir x nu satisface condiția (spre exemplu: „b” adăugat la „p” = „bp” ... „c” adăugat la „p” = „cp”).

Deci, mulțimea „ap” $[\phi]$ conține doar „a”.

Întrucât „ap” $[\phi]$ are un singur element, funcția ϕ are o funcție inversă pentru $y = „ap”$, care este „eliminarea literei ‘p’ de la sfârșit” (adică, pur și simplu: „a”, întrucât în acest caz, „ap” $\rightarrow$ „a”).

Și atunci:

Pentru pre-simbol, $[\phi], „pa” = \{„a”\}$, există o funcție inversă (eliminarea „p” de la început).

Pentru post-simbol, „ap” $[\phi] = \{„a”\}$, există o funcție inversă (eliminarea „p” de la sfârșit).

Doar că, ignorând „pre” și „post”-simbolurile, să presupunem un alt caz.

Re-folosind un „limbaj actualizat”, să presupunem că:

$f(x) = 1$ unde x ar putea fi absolut orice „număr natural”, deci $f(1)= 1$, $f(2)= 1$, $f(3)= 1$... și așa mai departe.

Atunci – în acest caz – nu s-ar mai putea „construi” nici un soi de „funcție inversă”, așa încât – pur și simplu – plecându-se de la „1”, să se ajungă la „x”.



Ori – re-iterând:

Dacă se știe că $f(\text{absolut orice număr natural}) = 1$, ce modalitate ar putea exista pentru a se „determina» care anume era acel «absolut orice număr natural» știindu-se că « $f(\text{absolut orice număr natural}) = 1$ »”.

Și mai mult chiar, domnul Peano sugerează că simbolul [] se aplică și în afara funcțiilor.

De exemplu, dacă α este afirmația „ x este par”, mulțimea $[x]$ „ x este par” conține toate numerele pare (2, 4, 6 ...).

Cu alte cuvinte:

Dacă printr-o „propoziție prin care se afirmă ceva despre altceva ... $\alpha(x)$ ” se poate construi „mulțimea A”, atunci și din mulțimea A se poate reconstrui „propoziția ... $\alpha(x)$ ”.

Deci – în acest caz – dacă se afirmă, pur și simplu, că: „ x este par”, atunci acel „ x ” putând fi reprezentat de „orice număr par”, în mod obligatoriu ar putea fi reprezentat de „absolut orice număr par”, precum 2, 4, 6 ... și așa mai departe.

Doar că, știindu-se că, x ar putea fi reprezentat de „orice număr par”, s-ar putea „construi” o „propoziție” – „o afirmație” sau pur și simplu: „tot «o funcție care ...» ori «o regulă prin care ... » sau «o procedură prin care ...»” – prin care să se „clameze”, cum anume ar fi putut fi construită acea „mulțime de numere pare”.

Deși, dacă – spre ultim exemplu – s-ar clama, pur și simplu că: „ x este π ” - desigur - s-ar putea „construi” o „propoziție” – „o afirmație” sau „orice altceva”, prin care ...” – prin care să se „clameze”, cum anume ar fi putut fi construită această „mulțime cu un singur element”.

Și anume – în cea mai trivială euclidiană perspectivă – afirmându-se că: „ x ” ar fi „re-construit” prin: „lungimea oricărui cerc împărțită la raza acestuia”.

Doar că, în acest moment s-ar pune problema:

Din moment ce valoarea lui π este reprezentată de un număr transcendent, atunci:

„ π are o valoare unică?”

Și dacă nu o are, atunci nu s-ar putea construi o infinitate de „ π ”-uri cu valori absolut diferite?

Cu alte ultime cuvinte:

Este π o constantă absolută? Sau depinde de contextul în care e „construită”?

Și mai mult chiar, exact aceeași problemă s-ar presupune că ar apărea în cazul absolut tuturor numerelor transcendente – așa precum abia am sugerat.

Oricum, revenind:



„Sit α formula indeterminate continens x , sitque ϕ functionis praesignum, quod x , sitque ϕ functionis praesignum, quod litterae x praepositum, formulam α gignat; scilicet sit $\alpha = \phi x$; tunc erit $\phi = \alpha[x]$, et si x' est novum ens, erit $\phi x' = \alpha[x]x'$, scilicet, si α est formula indeterminatum continens x . Tunc $\alpha[x]x'$ significat id quod obtinetur si in α , loco x , x' ponatur.

Similiter, sit α formula indeterminate continens x , sitque ϕ functionis postsignum, ut $x\phi = \alpha$; deducitur $\phi = [x]\alpha$; tunc, si x' est novum ens, erit $x'\phi = x'[x]\alpha$, scilicet $x'[x]\alpha$ rursum indicat id quod obtinetur si in α , loco x , x' legatur, ut in V, 4.”

Fie α o formulă nedeterminată care conține x și fie ϕ simbolul unei funcții care, plasat înaintea literei x , generează formula α ; adică, fie $\alpha = \phi x$.

Atunci, $\phi = \alpha[x]$, iar dacă x' este o nouă entitate, atunci $\phi x' = \alpha[x]x'$.

Cu alte cuvinte, dacă α este o formulă nedeterminată care conține x , atunci $\alpha[x]x'$ semnifică ceea ce se obține dacă, în α , în locul lui x , se pune x' .

În mod similar, fie α o formulă nedeterminată care conține x și fie ϕ simbolul unei funcții plasat după x , astfel încât $x\phi = \alpha$.

Se deduce că $\phi = [x]\alpha$.

Atunci, dacă x' este o nouă entitate, va fi $x'\phi = x'[x]\alpha$. Cu alte cuvinte, $x'[x]\alpha$ indică din nou ceea ce se obține dacă, în α , în locul lui x , se citește x' , conform secțiunii V, 4.”

Unde, printr-o „formula indeterminate” s-ar putea înțelege:

„O expresie matematică care conține o variabilă x ” – precum, spre exemplu, $x+1$, x^2 .

Iar – tot spre exemplu - dacă $\alpha = x+1$, atunci $\phi x = x+1$, iar ϕ reprezintă funcția „adună 1”. Astfel, $\phi = \alpha[x]$ înseamnă că ϕ este funcția care, aplicată la x , dă $x+1$.

Iar, în cazul „post-fixat”, dacă $x\phi = x+1$, atunci ϕ este operația „adună 1”, iar $x'\phi$ înseamnă $x'+1$.

Deci:

Dacă α este o expresie cu variabila x , iar ϕ este o funcție care, aplicată lui x , produce α (adică $\alpha = \phi x$) atunci ϕ este funcția definită de α .

Dacă s-ar înlocui x cu x' , s-ar obține $\phi x' = \alpha$ cu x' în locul lui x .

Și la fel, dacă ϕ este o funcție notată după x (adică $x\phi = \alpha$) atunci ϕ este funcția dată de α , iar pentru x' , $x'\phi$ înseamnă α cu x' în locul lui x .

„Alios quoque usus in logica signum $[\]$ habere potest, quos bre $\wedge$ iter esponimus, quum ipsis non utamur.

Sint a et b duae classes; tunc $[a\cap]b$ sive $b[\cap a]$ classes indicat x , quae conditioni $b = a \cap x$, sive $b = x \cap a$ satisfaciunt. Si b in a non continetur, nulla classis huic conditioni satisfacit; si b in a continetur, signum $b[\cap a]$ omnes indicat classes quae b continent atque in $b \cup -a$ continentur.

In arithmetica, sint a , b numeri; tunc $[b +]a$ sive $[+b]a$ numerum indicat x , qui conditioni $b = x + a$, sive $b = a + x$ satisfacit, nempe $b - a$.



Similiter erit $b[\times a] = [a \times]b = b/a$. Et in analysi hoc signum usu $\wedge$ enire potest; itaque:"

Semul $[]$ poate avea și alte utilizări logice, pe care le vom expune pe scurt, deoarece nu le folosim aici.

Fie a și b două clase – mulțimi .

Atunci $[a \cap]b$ sau $b[a \cap]$ indică mulțimile x care satisfac condiția $b = a \cap x$, sau $b = x \cap a$.

Dacă b nu este conținut în a , nicio mulțime nu satisface această condiție.

Iar, dacă b este conținut în a , notația $b[a \cap]$ indică toate mulțimile care conțin b și sunt conținute în $b \cup -a$.

Precum, spre exemplu:

Dacă $a = \{1, 2, 3\}$, $b = \{1, 2\}$, atunci x trebuie să fie o mulțime care conține $\{1, 2\}$ și să fie inclusă în $\{1, 2\} \cup \{4, 5, \dots\}$.

Iar, în acest caz, x ar putea fi mulțimea $\{1, 2\}$ sau $\{1, 2, 4\}$... și tot așa mai departe.

În aritmetică, fie a, b numere; atunci $[b+a]$ sau $[a+]b$ indică numărul x care satisface condiția $b = x+a$, sau $b = a+x$, adică $b - a$.

În mod similar, $b[\times a] = [a \times]b = b/a$.

Precum, spre exemplu:

În cazul în care „ $[b+a] = b-a$ ”, notația $[b+a]$ reprezintă numărul x astfel încât $x+a = b$, deci $x = b-a$.

Și atunci, dacă $b = 5$, $a = 3$, atunci $[5+3] = 5-3 = 2$.

Iar, în cazul în care „ $b[\times a] = b/a$ ”, $b[\times a]$ reprezintă x astfel încât $x \cdot a = b$, deci $x = b/a$.

Și atunci, dacă $b = 6$, $a = 2$, atunci $6[\times 2] = 6/2 = 3$.

În „analiză”, acest simbol poate fi utilizat; astfel:

Notația originală	Interpretare contemporană	Notația originală	Interpretare contemporană
$y = \sin x . = . x \in [\sin] y$	echivalent cu $y = \sin x$ este echivalent cu $x \in [\sin] y$	(loco $x = \arcsin y$).	în loc de $x = \arcsin y$
$dF(x) = f(x)dx . = . F(x) \in [d] f(x)dx$	echivalent cu $dF(x) = f(x)dx$ este echivalent cu $F(x) \in [d] f(x)dx$	(loco $F(x) = \int f(x)dx$)	în loc de $F(x) = \int f(x)dx$

Precum, spre exemplu:

În cazul în care „ $y = \sin x \rightarrow x \in [\sin] y$ ”, aceasta este o notație pentru funcția inversă.



În loc de $x = \arcsin y$, domnul Peano folosește $x \in [\sin]y$ pentru a indica faptul că x este valoarea care, aplicată funcției sinus, produce y .

Iar, în cazul în care „ $dF(x) = f(x)dx \rightarrow F(x) \in [d]f(x)dx$ ”, domnia sa definește integrala nedefinită. În loc de $F(x) = \int f(x)dx$, notează $F(x) \in [d]f(x)dx$, indicând că $F(x)$ este o funcție a cărei derivată este $f(x)dx$.

Așa încât, domnul Peano propune utilizarea notației „ $[]$ ” ca o metodă de a exprima operații inverse sau relații funcționale în logică, aritmetică și analiză matematică.

Doar că, în reprezentări contemporane:

În logică, $b[\cap a]$ ar putea fi interpretată ca o mulțime soluție a unei ecuații în teoria mulțimilor.

În aritmetică, $[b+a]$ este echivalent cu operația inversă a adunării, adică $b-a$.

În analiză, $[\sin]y$ este echivalent cu $\arcsin y$, iar $[d]f(x)dx$ este echivalent cu: $\int f(x)dx$.

„Sit rursum ϕ functionis praesignum in classi s , sitque k classis in s contenta; tunc ϕk classem indicat omnibus ϕx compositam, ubi x sunt entia classis k ; scilicet:”

Fie din nou ϕ simbolul unei funcții prefixate definite pe o clasă s și fie k o clasă conținută în s . Atunci ϕk indică o clasă formată din toate ϕx , unde x sunt entitățile (elementele) clasei k .

Mai exact:

Notația originală	Interpretare contemporană
Def. $s \in K . k \in K . k \supset s . \phi \in F' s : \supset . \phi k = [y \in (k . [\phi]y : - = \wedge)$	Dacă $s \in K$, $k \in K$, $k \subseteq s$ și $\phi \in F's$ (unde $F's$ reprezintă mulțimea funcțiilor definite pe s) atunci: $\phi(k) = \{y \mid \exists x \in k \text{ astfel încât } \phi(x) = y\}$
Sive $s \in K . k \in K . k \supset s . \phi \in F' s : \supset . \phi k = [y \in ([x \in] : x \in k . [\phi]x = y \dots - = \wedge)$	Dacă $s \in K$, $k \in K$, $k \subseteq s$ și $\phi \in F's$, atunci: $\phi(k) = \{y \mid \{x \in K \mid x \in k \text{ și } \phi(x) = y\} \neq \emptyset\}$
Def. $s \in K . k \in K . k \supset s . \phi \in s'F : \supset . k \phi = [y \in (k . y [\phi] : - = \wedge$	Dacă $s \in K$, $k \in K$, $k \subseteq s$ și $\phi \in s'F$ (unde $s'F$ reprezintă funcțiile post-fixate) atunci: $k\phi = \{y \mid \exists x \in k \text{ astfel încât } x\phi = y\} \neq \emptyset$

„Itaque, si $\phi \in F' s$, tunc ϕs classem indicat omnibus ϕx constitutam, ubi x sint entia classis s . Erit:”

Astfel, dacă $\phi \in F's$, atunci ϕs indică clasa formată din toate ϕx , unde x sunt entitățile clasei s . Și atunci:

Notația originală	Interpretare contemporană
1. $s \in K . \phi \in F' s . y \in \phi s : \supset : \phi[\phi]y = y$	Dacă $s \in K$, $\phi \in F's$ și $y \in \phi s$, atunci: $\phi[\phi]y = y$
2. $s \in K . a, b \in K . a \supset s . b \supset s . \phi \in F' s : \supset . \phi(a \cup b) = (\phi a) \cup (\phi b)$	Dacă $s \in K$, $a, b \in K$, $a \subseteq s$, $b \subseteq s$ și $\phi \in F's$, atunci: $\phi(a \cup b) = (\phi a) \cup (\phi b)$
3. $s \in K . \phi \in F' s : \supset . \phi \wedge = \wedge$	Dacă $s \in K$, $\phi \in F's$, atunci: $\phi \emptyset = \emptyset$ (unde



		$\emptyset$ reprezintă clasa vidă).
4.	$s \in K, a, b \in K, b \supseteq s, a \supseteq b, \phi \in F's : \supseteq, \phi a \supseteq \phi b$	Dacă $s \in K, a, b \in K, b \subseteq s, a \subseteq b$ și $\phi \in F's$, atunci: $\phi a \subseteq \phi b$
5.	$s \in K, a, b \in K, a \supseteq s, b \supseteq s, \phi \in F's : \supseteq, \phi(ab) \supseteq (\phi a)(\phi b)$	Dacă $s \in K, a, b \in K, a \subseteq s, b \subseteq s$ și $\phi \in F's$, atunci: $\phi(ab) \subseteq (\phi a)(\phi b)$ (unde ab reprezintă intersecția $a \cap b$).

Așa încât domnul Peano utilizând un limbaj formal pentru a descrie aplicarea funcțiilor la clase (mulțimi) și proprietățile rezultate promovează perspectiva unei funcții, ϕ care acționează asupra elementelor unei – mulțimi de elemente - clase k , unde ϕk reprezintă „imaginea” clasei k prin funcția ϕ .

Iar, notațiile $F's$ și $s'F$ se referă la funcții prefixate (spre exemplu ϕx) și respectiv, post-fixate (spre exemplu $x\phi$).

În timp ce, simbolurile K , reprezintă clasa claselor (mulțimea mulțimilor); $\emptyset$ este mulțimea vidă, iar menționarea apartenenței la $\emptyset$ indică o condiție care nu este validă.

Și – în acest context – domnia sa definește:

„ ϕk ”: Dacă k este o mulțime conținută în s , iar ϕ este o funcție pe s , atunci $\phi k = \{\phi x \mid x \in k\}$.
Așa precum actualmente – adică - s-ar reprezenta imaginea mulțimii k prin funcția ϕ .

Iar, notația „ $s \in K, k \in K, k \supseteq s, \phi \in F's : \supseteq, \phi k = [y \in] ([x \in] : x \in k, [\phi]x = y \dots - = \wedge)$ ” definește mulțimea y -urilor astfel încât există un $y \in k$ pentru care $\phi x = y$.

Așa precum actualmente s-ar accepta că: $\phi k = \{y \mid \exists x \in k, \phi x = y\}$

Funcții post-fixate „ $(k\phi)$ ”: Similar, dar cu o notație diferită (post-fixată) care este mai puțin comună - actualmente.

Cu proprietățile:

1. „ $\phi[\phi]y = y$ ”: sugerând, că ϕ este o funcție care, aplicată la un element din imaginea sa, returnează același element și astfel indicând o proprietate de idempotență sau o funcție bijectivă pe imaginea sa.

Iar, o funcție bijectivă asociază fiecărui element din domeniu un element distinct din imaginea sa, iar imaginea sa coincide exact cu codomeniul - adică „acoperă” complet mulțimea-țintă fără să lase „nimic neatins”.

Precum spre exemplu:

O „funcție injectivă” (dar nu surjectivă) ar fi o funcție care printr-o anumită „regulă de asociere a elementelor din «celălalt domeniu»” ar face ca:

$$f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f(1) = 2$$



$$f(2) = 4$$

$$f(3) = 5$$

Unde $\{1, 2, 3\}$ ar reprezenta domeniul, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ar reprezenta codomeniul iar $\{2, 4, 5\}$ ar reprezenta „ imaginea”.

Și ar fi „injectivă”, întrucât la „elemente distincte” ar asocia „alte elemente distincte”.

Și nu ar fi „surjectivă”, întrucât elementele 1 și 3 din „codomeniu” nu sunt cu nimic „asociate”

Iar:

O „funcție surjectivă” (dar nu injectivă) ar fi o funcție care printr-o anumită „regulă de asociere a elementelor din «celălalt domeniu»” ar face ca:

$$g: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

$$g(1) = 1$$

$$g(2) = 2$$

$$g(3) = 2$$

$$g(4) = 3$$

Unde $\{1, 2, 3, 4\}$ ar reprezenta domeniul, $\{1, 2, 3\}$ ar reprezenta codomeniul iar $\{1, 2, 3\}$ ar reprezenta „ imaginea”, întrucât, deși elementul 2 se repetă, deja era menționat.

Și ar fi „surjectivă” întrucât toate elementele din codomeniu sunt „atinse” cel puțin o dată.

Și nu ar fi injectivă, întrucât $g(2)$ e identic cu $g(3)$ și ambele sunt reprezentate de către elementul 2 – din codomeniu.

Și – în cele din urmă:

O „funcție bijectivă” (adică atât injectivă cât și surjectivă) ar fi o funcție care printr-o anumită „regulă de asociere a elementelor din «celălalt domeniu»” ar face ca:

$$h: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$$

$$h(1) = 5$$

$$h(2) = 4$$

$$h(3) = 6$$

Unde $\{1, 2, 3\}$ ar reprezenta domeniul, $\{4, 5, 6\}$ ar reprezenta codomeniul iar $\{4, 5, 6\}$ ar reprezenta „ imaginea”.

Și ar fi „injectivă” pentru că unor elemente distincte din domeniu ar asocia elemente distincte din codomeniu.

Și – în același timp – ar fi și „surjectivă” pentru că – pur și simplu - tuturor elementelor din codomeniu le-ar fi „asociate” elemente din „domeniu”.

Oricum – revenind:



2. „ $\phi(a \cup b) = (\phi a) \cup (\phi b)$ ”: sugerând că, funcția ϕ păstrează reuniunea mulțimilor, o proprietate importantă în teoria mulțimilor.

3. „ $\phi \wedge =$ ”: sugerând că, imaginea mulțimii vide prin ϕ este mulțimea vidă.

4. $a \subseteq b \rightarrow \phi a \subseteq \phi b$: sugerând că, funcția ϕ este monotonă - păstrează „incluziunea”.

5. $\phi(a \cap b) \subseteq (\phi a) \cap (\phi b)$: sugerând că, imaginea intersecției prin ϕ este inclusă în intersecția imaginilor – deși, de fapt egalitatea nu este garantată decât dacă ϕ este injectivă.

De fapt, precum spre exemplu:

Fie $s = \{1, 2, 3\}$, $k = \{1, 2\}$ și $\phi x = x + 1$.

Și atunci:

$\phi k = \{\phi 1, \phi 2\} = \{2, 3\}$.

Iar dacă, $a = \{1\}$, $b = \{2\}$, atunci:

$a \cup b = \{1, 2\}$

$\phi(a \cup b) = \phi\{1, 2\} = \{2, 3\}$.

$(\phi a) \cup (\phi b) = \{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$

Confirmând proprietatea:

$\phi(a \cup b) = (\phi a) \cup (\phi b)$.

Ori – cu alte cuvinte:

Fie ϕ o funcție definită pe o mulțime s și fie $k \subseteq s$.

Atunci ϕk este mulțimea formată din ϕx pentru toate $x \in k$.

Formal: $\phi k = \{y \mid \exists x \in k, \phi x = y\}$.

Iar, pentru funcții post-fixate, $k\phi$ are o definiție similară.

Și – în acest context – o astfel de funcție are următoarele proprietăți:

ϕ aplicată la imaginea sa returnează același element: $\phi(\phi y) = y$.

ϕ păstrează reuniunea: $\phi(a \cup b) = (\phi a) \cup (\phi b)$.

ϕ aplicată mulțimii vide dă mulțimea vidă: $\phi \emptyset = \emptyset$.

Dacă $a \subseteq b$, atunci $\phi a \subseteq \phi b$.

Imaginea intersecției este inclusă în intersecția imaginilor: $\phi(a \cap b) \subseteq (\phi a) \cap (\phi b)$.



„Sit a quaedam classis; tunc $a \cap K$ sive $K \cap a$, sive $K a$, classes omnes indicat formae $a \cap x$, sive $x \cap a$, xa , ubi x est classis quacumque; scilicet $K a$ indicat classes quae in a continentur. Formula $x \in K a$ idem significat quod $x \in K \cdot x \supset a$.

Hac conventionem quandoque utimur; ita $K N$ significat numerorum classem.

Similiter, si a est classis, $K \cup a$ indicat classes quae a continent.

Sit a numerus; tunc $a + N$, sive $N + a$, numeros indicat numero a maiores; $a \times N$, sive $N \times a$, sive $N a$ indicat multiplices numeri a ; a^N indicat potestas numeri a ; $N^2, N^3 \dots$ indicat numeros quadratos, vel numeros cubos ...

Functional signorum aequalitatem, productum, potestas, ita definire licet:”

Fie a o anumită clasă – mulțime.

Atunci $a \cap K$ ori $K \cap a$ sau Ka , indică toate clasele de forma $a \cap x$, sau $x \cap a$, sau xa , unde x este o clasă oarecare.

Cu alte cuvinte, Ka indică clasele care sunt conținute în a .

Formula $x \in Ka$ înseamnă același lucru ca $x \in K \wedge x \subseteq a$. Iar, această convenție o folosim uneori; astfel, KN reprezintă clasa numerelor.

În mod similar, dacă a este o clasă, $K \cup a$ indică clasele care conțin a .

Dacă a este un număr, atunci $a + N$, sau $N + a$, indică numerele mai mari decât a ; $a \times N$, sau $N \times a$, sau Na , indică multipli ai numărului a ; a^N indică puterile numărului a ; $N^2, N^3 \dots$ indică numerele pătrate, respectiv numerele cubice ...

Egalitatea, produsul și puterile semnelor funcționale pot fi definite astfel:

Notăția originală		Interpretare contemporană
Def.	$s \in K \cdot \phi, \psi \in F' s : \supset \therefore \phi = \psi := x \in s \cdot \supset \cdot \phi x = \psi x$	Dacă $s \in K$, $\phi, \psi \in F's$ (unde $F's$ reprezintă mulțimea funcțiilor prefixate definite pe s) atunci: $\phi = \psi := \forall x \in s, \phi x = \psi x$
Def.	$s \in K \cdot \phi \in F' s \cdot \psi \in F' \phi s \cdot x \in s : \supset \cdot \psi \phi x = \psi(\phi x)$	Dacă $s \in K$, $\phi \in F's$, $\psi \in F'(\phi s)$ și $x \in s$, atunci: $\psi \phi x = \psi(\phi x)$

„Itaque, in definitionis hypothesis, erit $\psi \phi$ novum functionis praesignum; idque productum signorum ψ et ϕ vocatur.

Similiterque, si ϕ, ψ sunt functionis postsigna. haec valet propositio:”

Astfel, în ipoteza definiției, $\psi \phi$ este un nou simbol funcțional prefixat, numit produsul – compoziția - semnelor ψ și ϕ .

În mod similar, dacă ϕ și ψ sunt simboluri funcționale post-fixate, această propoziție este valabilă.

Notăția originală		Interpretare contemporană
$s \in K \cdot \phi \in F' s \cdot \phi s \supset s : \supset : \phi \phi s \supset s \cdot \phi \phi \phi s \supset s \text{ etc.}$		Dacă $s \in K$, $\phi \in F's$ și $\phi s \subseteq s$, atunci: $\phi \phi s \subseteq s$, $\phi \phi \phi s \subseteq s$ și așa mai departe.



„Funcitones $\phi\phi$, $\phi\phi\phi$... iteraiae vocantur, et communiter signis ϕ^2 , ϕ^3 ... indicantur, ut operationis ϕ potestates.

Si vero ϕ est functionis postsignum, ha faciliori notatione, absque ambiguitate, uti licet:”

Funcțiile $\phi\phi$, $\phi\phi\phi$... se numesc „funcții iterate” și sunt notate în mod obișnuit cu ϕ^2 , ϕ^3 ... ca puteri ale operației ϕ .

Dacă, însă, ϕ este un simbol funcțional post-fixat, se poate folosi o notație mai simplă, fără ambiguitate:

Notația originală		Interpretare contemporană
Def.	$s \in K . \phi \in s'F . s\phi \supset s : \supset : \phi 1 = \phi . \phi 2 = \phi\phi . \phi 3 = \phi\phi\phi . \text{etc.}$	Dacă $s \in K$, $\phi \in s'F$ și $s\phi \subseteq s$, atunci: $\phi 1 = \phi$, $\phi 2 = \phi\phi$, $\phi 3 = \phi\phi\phi$ și așa mai departe

Așa încât, domnul Peano continuă să dezvolte un sistem formal pentru logica matematică, teoria mulțimilor și aritmetica, definind operații pe clase – mulțimi - și funcții, precum și iterarea funcțiilor, folosind notații precum Ka , $\phi\phi$ și ϕn , unde simbolurile K , $F's$ și $s'F$ reprezintă, respectiv, clasa claselor (mulțimea mulțimilor) funcțiile prefixate pe s și funcțiile post-fixate pe s .

Deci:

Ka : Reprezintă mulțimea tuturor submulțimilor lui a , adică $\{x \mid x \subseteq a\}$. De exemplu, dacă $a = \{1, 2\}$, atunci $Ka = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

$x \in Ka$: Echivalent cu $x \in K \wedge x \subseteq a$, adică x este o mulțime conținută în a .

KN : Reprezintă clasa numerelor naturale - sau o clasă similară, în funcție de contextul sistemului lui Peano.

$K \cup a$: Reprezintă mulțimile care conțin a , adică $\{x \mid a \subseteq x\}$.

Numere:

$a+N$: Reprezintă numerele mai mari decât a , adică $\{a+n \mid n \in N\}$, unde N este mulțimea numerelor naturale.

$a \times N$: Reprezintă multipli lui a , adică $\{a \cdot n \mid n \in N\}$.

a^N : Reprezintă puterile lui a , adică $\{a^n \mid n \in N\}$.

n^2, n^3 : Reprezintă numerele pătrate ($\{n^2 \mid n \in N\}$) și, respectiv, cubice ($\{n^3 \mid n \in N\}$).

Egalitatea funcțiilor: $\phi = \psi$ înseamnă că $\phi x = \psi x$ pentru orice $x \in s$ – precum în contemporaneitate s-ar defini egalitatea funcțiilor

Compoziția funcțiilor: $\psi\phi x = \psi(\phi x)$ definește compunerea funcțiilor, unde ϕ se aplică mai întâi, apoi ψ .



Spre exemplu, dacă $\phi x = x+1$ și $\psi x = x^2$, atunci $\psi\phi x = \psi(x+1) = (x+1)^2$.

Iterarea funcțiilor: Dacă $\phi s \subseteq s$, atunci ϕ poate fi aplicată repetat, rezultând $\phi^2 = \phi\phi$, $\phi^3 = \phi\phi\phi$, etc. De exemplu, dacă $\phi x = x+1$, atunci $\phi^2 x = (x+1)+1 = x+2$.

Pentru funcții post-fixate ($x\phi$) iterarea este notată similar: $\phi^2 = \phi\phi$ și așa mai departe.

Precum, spre exemplu:

Fie $s = \{1, 2, 3\}$, $\phi x = x+1$ (definită astfel încât $\phi s \subseteq s$, de exemplu, prin restricție).

Atunci:

$\phi^1 = 2$, $\phi^2 = 3$, $\phi^3 = 4$ poate fi definită doar pe submulțimi ale lui s .

$\phi s = \{\phi^1, \phi^2, \phi^3\} = \{2, 3, 4\}$.

$\phi^2 x = \phi(\phi x)$ de exemplu, $\phi^2 1 = \phi^2 = 3$.

Pentru $a = \{1, 2\}$, $Ka = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Deși, în accepții contemporane:

Ka este echivalent cu $P(a)$ mulțimea părților lui a .

$\phi\phi$ reprezintă compunerea funcțiilor, notată astăzi ca $\phi \circ \phi$.

ϕ^n reprezintă aplicarea de N ori a funcției ϕ , o notație standard în matematică modernă.

Ori – cu alte cuvinte:

Fie a o mulțime.

Atunci Ka reprezintă toate submulțimile lui a , adică $\{x \mid x \subseteq a\}$.

De exemplu, KN este mulțimea numerelor naturale.

$K \cup a$ reprezintă mulțimile care conțin a .

Pentru un număr a :

$a+N$: numerele mai mari decât a .

$a \times N$: multipli lui a .

a^N : puterile lui a .

n^2, n^3 : numerele pătrate, cubice, etc.

Egalitatea funcțiilor $\phi = \psi$ înseamnă că $\phi x = \psi x$ pentru orice x din domeniul s .

Compoziția funcțiilor este $\psi\phi x = \psi(\phi x)$.

Dacă $\phi s \subseteq s$, funcția ϕ poate fi aplicată repetat, rezultând ϕ^2, ϕ^3 și așa mai departe, numite funcții iterate.

Pentru funcții post-fixate, $\phi^1 = \phi$, $\phi^2 = \phi\phi$ și așa mai departe.

„In definitionis hypothesi, si $M, N \in N$, erit $\phi(M + n) = (\phi m)(\phi n)$; $(\phi m)n = \phi(mn)$

Si hac definitione in arithmetica utimur, haec in $\wedge$ enimus. Numerum qui sequitur numerum a signo faciliiori $a+$ indicare possumus; tunc $a + 1, a + 2 \dots$ et, si b est numerus, $a + b$, sensum habent $a+, a++ \dots$ quod a definitione in §1 patet.



Propositionem 6 in §1 scribere possumus $N^+ \supseteq N$. Si $a, b, \odot$ sunt numeri, tunc $a : +b . \odot$ significat $a + bc$, et $a : \times b . c$ significat abc .

Multi aliis proprietatibus gaudent functionem signa, praesertim si conditioni satisfaciunt: $\phi x = \phi y . \odot . x = y$.

Functionis signum quod huic conditioni satisfacit vocatur a clarrissimo Dedekind simile („ähnliche Abbildung”).

Sed his exponendis locus deest.”

În ipoteza definiției, dacă $m, n \in N$, atunci: $\phi(m+n) = (\phi m)(\phi n)$ și $(\phi m)n = \phi(mn)$

Iar, dacă folosim această definiție în aritmetică, obținem următoarele.

Numărul care urmează numărului a poate fi notat mai simplu cu $a+$; astfel, $a+1, a+2 \dots$ și dacă b este un număr, $a+b$, au sensul clar din definiția dată în §1.

Propoziția 6 din §1 poate fi scrisă ca $N^+ \subseteq N$. Dacă a, b, c sunt numere, atunci $a : +b \cdot c$ înseamnă $a+bc$, iar $a : \times b \cdot c$ înseamnă abc .

Multe alte proprietăți caracterizează simbolurile funcțiilor, în special dacă satisfac condiția: $\phi x = \phi y \rightarrow x = y$.

Un simbol funcțional care îndeplinește această condiție este numit, conform ilustrului Dedekind, ähnliche Abbildung - funcție similară sau injectivă.

Dar, nu este loc aici pentru a detalia aceste proprietăți.”
Așa încât:

În ceea ce – în continuare - privește proprietățile funcțiilor:

Prin „ $\phi(m+n) = (\phi m)(\phi n)$ ” domnia sa sugerează că funcția ϕ transformă adunarea numerelor naturale într-o operație (notată aici ca „produs”) pe imaginea sa.

Spre exemplu, dacă ϕ este o funcție care mapează numerele naturale într-o altă structură, această proprietate indică un soi de omomorfism.

Prin „ $(\phi m)n = \phi(mn)$ ” domnia sa descrie o proprietate legată de exponențiere sau multiplicare repetată.

Spre exemplu, dacă ϕ este o funcție care respectă structura multiplicativă, aplicarea lui ϕ la M de N ori echivalează cu aplicarea lui ϕ la produsul mn .

În ceea ce privește notația succesorului:

$a+$: reprezintă succesorul numărului a , adică $a+1$, domnia sa propunând această notație pentru a simplifica scrierea numerelor consecutive: $a+1, a+2$ și așa mai departe.

$a+b$: reprezintă adunarea standard



$a+, a++$: reprezintă $a+1$, $a+2$ și așa mai departe

În ceea ce privește „propoziția 6”, adică „ $N+ \subseteq N$ ”:

Aici, $N+$ reprezintă mulțimea numerelor naturale obținute prin aplicarea succesorului (adică $\{n+1 \mid n \in N\}$). Și este inclusă în N , ceea ce reflectă proprietatea că succesorul unui număr natural este tot un număr natural.

În ceea ce privește operațiile aritmetice:

$a:+b \cdot c$: înseamnă $a+bc$, adică adunarea lui a cu produsul $b \cdot c$.
Și este o notație care clarifică ordinea operațiilor.

$a:\times b \cdot c$: înseamnă abc , adică produsul numerelor a , b și c .

Și totodată domnia sa menționează funcțiile injective - „ähnliche Abbildung” – alături de proprietatea:

Dacă $\phi x = \phi y \rightarrow x = y$, atunci ϕ este o funcție injectivă.

De fapt, este pur și simplu o „axiomă”, asumată prin definirea generică a oricărei „funcții injective”.

Care reprezintă – la rândul său - o referință la conceptul de injectivitate – de altfel esențială în teoria mulțimilor și algebră, întrucât „garantează” că funcția nu asociază elemente distincte aceluiași „rezultat”.

Altfel spus, orice „funcție injectivă” asociază fiecărui element din domeniul său de definiție un singur și absolut distinct element, din imaginea sa.

Cu alte cuvinte - în acest context - o funcție injectivă respectă regula prin care s-ar presupune că „succesori diferiți provin de la predecesori diferiți”.

Adică dacă două numere naturale produc rezultate identice printr-o operație, atunci ele trebuie să fie același număr de la început

Sau – pur și simplu - în mulțimea numerelor naturale construite pas cu pas, o funcție injectivă păstrează „identitatea” fiecărui număr.

Precum spre exemplu:

Dacă $\phi x = x+1$ pe N , atunci: $\phi(m+n) = (m+n)+1$

Iar: $(\phi m)(\phi n) = (m+1)(n+1)$.

Doar că, aceasta nu satisface $\phi(m+n) = (\phi m)(\phi n)$ deci ϕ trebuie să fie o funcție specifică - spre exemplu, un omomorfism multiplicativ.



Pentru succesori, dacă $a = 3$, atunci $a+ = 4$, $a++ = 5$ și așa mai departe.

Dacă $\phi x = 2x$, atunci $\phi(m+n) = 2(m+n) = 2m+2n$, iar $(\phi m)(\phi n) = (2m)(2n) = 4mn$, ceea ce arată că proprietatea depinde de natura lui ϕ .

Cu alte cuvinte:

Dacă $m, n \in \mathbb{N}$, atunci o funcție ϕ satisface:

$$\phi(M+n) = (\phi m)(\phi n) \text{ și } (\phi m)n = \phi(mn).$$

În aritmetică, $a+$ înseamnă succesorul lui a , adică $a+1$, astfel încât $a+1, a+2 \dots$ și $a+b$ sunt definite conform §1.

Propoziția $\mathbb{N}^+ \subseteq \mathbb{N}$ afirmă că succesorii numerelor naturale sunt tot numere naturale.

Pentru numere a, b, c :

$a:b \cdot c$ înseamnă $a+bc$.

$a:\times b \cdot c$ înseamnă abc .

Funcțiile care satisfac $\phi x = \phi y \rightarrow x = y$ sunt injective.

Precum spre ultim exemplu:

Să considerăm „funcția succesorului” oricărui număr „ n ”:

$$\phi(n) = n+1$$

Aceasta este o funcție injectivă, întrucât:

$$\text{Dacă } \phi(m) = \phi(n) \text{ atunci } m+1 = n+1 \rightarrow m = n.$$

Iar – tocmai – această „axiomă” proprietate este folosită în definirea succesorilor pentru a asigura că fiecare număr natural are un succesor unic și că $\mathbb{N}$ este o mulțime fără ... dubluri.

Și atunci – revenind:

„Declarationes.

Defenitio, vel breviter Def. est propositio formam habens $x = a$, sive $\alpha \supset . x = a$, ubi α est signorum aggregatus sensum habens notum; x est signum, vel signorum aggregatus significatione adhuc carnes; α vero est conditio sub qua definitio datur.

Theorema, (Theor. vel Th) est propositio quae demonstratur.

Si theorema formam habet $\alpha \supset \beta$, ubi α et β sunt propositiones, tunc α dicitur Hypothesis (Hyp. vel breviter Hp.) β vero Thesis (Thes. vel Ts.).

Hyp. ac Ts. a Theorematis forma pendent; nam si loco $\alpha \supset \beta$ scribemus $-\beta \supset -\alpha$, erit $-\beta$ Hp, et $-\alpha$ Ts.; si vero scribemus $\alpha - \beta = \wedge$ Hp. ac Ts. absunt.



In quolibet § signum P quod quidam numerus sequatur, propositionem indicat eiusdem § Hoc numero signatam. logicae propositiones indicantur signo L et propositiones numero.

Formulae quae in una linea non continentur, in altera linea, nullo interposito signo, sequuntur.”

Declarații.

Definiție, sau pe scurt Def., este o propoziție care are forma $x = a$, sau $\alpha \supset x = a$, unde α este un grup de simboluri cu un sens cunoscut; x este un simbol sau un grup de simboluri a căror semnificație nu este încă stabilită; iar α reprezintă condiția sub care se face definiția.

Teoremă, (notată Theor. sau Th.) este o propoziție care se demonstrează. Dacă teorema are forma $\alpha \supset \beta$, unde α și β sunt propoziții, atunci α se numește Ipoteză (Hyp. sau pe scurt Hp.) iar β se numește Teză (Thes. sau Ts.).

Ipoteza și teza depind de forma teoremei; de exemplu, dacă în loc de $\alpha \supset \beta$ scriem $-\beta \supset -\alpha$, atunci $-\beta$ devine ipoteza, iar $-\alpha$ devine teza.

Dacă, însă, scriem $\alpha - \beta = \wedge$, ipoteza și teza lipsesc.

În orice paragraf (§) simbolul P urmat de un anumit număr indică o propoziție din același paragraf, marcată cu acel număr.

Propozițiile logice sunt indicate prin simbolul L și prin propoziții numerotate.

Formulele care nu sunt cuprinse într-o singură linie continuă pe următoarea linie, fără a fi inserat vreun simbol între ele.

Deci:

„ARITHMETICES PRINCIPIA.

§1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo	N	significatur	numerus (integer positvus).
>>	1	>>	unitas.
>>	$a + 1$	>>	sequens a, sive a plus 1.
>>	=	>>	est aequalis. Hoc ut novum signum Considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.

42 Simbolul „ $\supset$ ” - în acest context - va reprezenta implicația materială sau condițională.

Și se citește „implică” sau „dacă ... atunci ...”

Precum spere exemplu: $P \supset Q$ înseamnă „dacă P, atunci Q” ori cu mai multe cuvinte, „dacă ceea ce se afirmă prin P este adevărat, atunci și ceea ce se afirmă prin Q este adevărat”.

Deși desigur, în teoria mulțimilor, poate reprezenta incluziunea inversă strictă, lipsită de egalitate, dar acum nu este cazul.



Axiomata.

1.	$1 \in \mathbb{N}.$
2.	$a \in \mathbb{N} \rightarrow a = a.$
3.	$a, b, c \in \mathbb{N} \rightarrow a = b \rightarrow b = a.$
4.	$a, b \in \mathbb{N} \rightarrow a = b \rightarrow b = c \rightarrow a = c.$
5.	$a = b \rightarrow b \in \mathbb{N} \rightarrow a \in \mathbb{N}.$
6.	$a \in \mathbb{N} \rightarrow a + 1 \in \mathbb{N}.$
7.	$a, b \in \mathbb{N} \rightarrow a = b \rightarrow a + 1 = b + 1.$
8.	$a \in \mathbb{N} \rightarrow a + 1 \neq 1.$
9.	$k \in \mathbb{K} \rightarrow 1 \in k \rightarrow \dots x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in k \rightarrow \exists x. x + 1 \in k \rightarrow \mathbb{N} \subseteq k.$

Definitiones.”

10.	$2 = 1 + 1; 3 = 2 + 1; 4 = 3 + 1; \text{etc.}$
-----	--

Cu alte cuvinte:

PRINCIPIILE ARITMETICII

§1. Despre numere și adunare

Explicații.

Simbolul	N	semnifică	număr (întreg pozitiv)
...	1	...	unitatea
...	a+1	...	succesorul lui a sau a plus 1
...	=	...	este egal Acest simbol trebuie considerat ca un simbol nou, deși are forma unui simbol logic.

Axiome

Notăția originală	Notăția contemporană	Limbaaj natural
1. $1 \in \mathbb{N}.$	$1 \in \mathbb{N}$	1 este un număr natural.
2. $a \in \mathbb{N} \rightarrow a = a.$	$a \in \mathbb{N} \rightarrow a = a$	„Orice lucru este egal cu el însuși”: Dacă a este un număr natural, atunci a este egal cu el însuși.



3.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \supset: a = b . = . b = a.$	$a, b, c \in \mathbb{N} \supset (a = b) = (b = a)$	„Simetria egalității”: Dacă a, b, c sunt numere naturale, atunci dacă a este egal cu b, b este egal cu a.
4.	$a, b \in \mathbb{N} . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c.$	$a, b, c \in \mathbb{N} \supset ((a = b) \wedge (b = c) \supset a = c)$	„Tranzitivitatea egalității”: Dacă a, b, c sunt numere naturale, atunci dacă a este egal cu b și b este egal cu c, atunci a este egal cu c.
5.	$a = b . b \in \mathbb{N} : \supset . a \in \mathbb{N} .$	$(a = b) \wedge (b \in \mathbb{N}) \supset a \in \mathbb{N}$	„Compatibilitatea cu apartenența la $\mathbb{N}$ ” Dacă a este egal cu b și b este un număr natural, atunci a este un număr natural.
6.	$a \in \mathbb{N} . \supset . a + 1 \in \mathbb{N} .$	$a \in \mathbb{N} \supset a + 1 \in \mathbb{N}$	Dacă a este un număr natural, atunci succesorul lui a (adică a + 1) este un număr natural.
7.	$a, b \in \mathbb{N} . \supset: a = b . = . a + 1 = b + 1.$	$a, b \in \mathbb{N} \supset (a = b) = (a + 1 = b + 1)$	Dacă a și b sunt numere naturale, atunci a este egal cu b dacă și numai dacă succesorul lui a este egal cu succesorul lui b.
8.	$a \in \mathbb{N} . \supset . a + 1 \neq 1.$	$a \in \mathbb{N} \supset a + 1 \neq 1$	Dacă a este un număr natural, atunci succesorul lui a nu este egal cu 1.
9.	$k \in K \therefore 1 \in k \dots x \in \mathbb{N} . x \in k : \supset x . x + 1 \in k :: \supset . \mathbb{N} \supset k.$	$k \in K \supset (1 \in k \wedge (\forall x \in \mathbb{N}, x \in k \supset x + 1 \in k) \supset \mathbb{N} \subseteq k)$	Principiul inducției matematice Orice mulțime k care conține 1 și este închisă în raport cu funcția succesor conține toate numerele naturale. Ori: Orice mulțime care conține 1 și este închisă în raport cu funcția succesor (adică, pentru orice număr care este conținut în acea mulțime și succesorul său tot în aceasta este conținut) conține toate numerele naturale.

Definiții.



Notăția originală		Interpretare în limbaj natural
10.	$2 = 1 + 1; 3 = 2 + 1; 4 = 3 + 1; \text{etc.}$	Numerele naturale sunt definite recursiv: 2 este succesorul lui 1, 3 este succesorul lui 2, 4 este succesorul lui 3 și așa mai departe.

Așa încât, în accepțiuni contemporane:

„N” reprezintă mulțimea numerelor naturale, numerele întregi pozitive, fără 0 (deși în interpretările contemporane 0 este uneori inclus).

„ $\in$ ” reprezintă – tot - simbolul de apartenență – altfel spus: „este element al”.

„ $\supset$ ” reprezintă – tot - implicația logică – altfel spus: „dacă ... atunci ...”

„ $\forall$ ” reprezintă – tot – „orice”, precum spre exemplu: orice x care este un număr natural ($x \in N$).

„ $\wedge$ ” reprezintă – tot – conjuncția logică, altfel spus „ȘI”

„ $\neq$ ” reprezintă inegalitatea.

„ $a + 1$ ” reprezintă succesorul lui a – altfel spus: „următorul număr natural”.

„Axioma 9” reprezintă „principiul inducției matematice”, care „garantează” că orice proprietate adevărată pentru 1 și păstrată de funcția succesor se aplică tuturor numerelor naturale.

Ori – cu alte cuvinte:

Axioma 1 stabilește că 1 este un număr natural.

Axiomele 2–5 definesc proprietățile egalității (reflexivitate, simetrie, tranzitivitate și compatibilitate cu apartenența la N).

Prin axioma „6” se axiomează funcționalitatea funcției „succesor”.

Prin axioma 7 se axiomează faptul că, funcția „succesor” este injectivă.

Prin axioma 8 se garantează că 1 nu este succesorul niciunui număr natural, întrucât – așa precum abia am sugerat – mulțimea numerelor naturale nici în accepțiile peanoiene nu-l include pe „0”.

În timp ce, prin axioma 9 se asigură demonstrarea proprietăților generice ale absolut tuturor numerelor naturale.

Iar, prin definiție se prezintă numerele 2, 3, 4 și așa mai departe, ca succesori succesivi ai lui 1, stabilind astfel o construcție recursivă a numerelor naturale.

Și în cele din urmă, simbolul K din axioma 9 reprezintă o clasă (sau mulțime) arbitrară, folosită pentru a formaliza principiul inducției.

Oricum – revenind:

„Theoremata.”

Deci:

Teoreme.



Notăția originală	Notăția contemporană	Limbaj natural
11. $2 \in \mathbb{N}$	$2 \in \mathbb{N}$	Numărul 2 este un număr natural.

„Demonstratio:”

Deci:

Demonstrație:

Notăția originală			Interpretare contemporană	
P1 .	$P1 . 1 \in \mathbb{N}$	(1)	P1:	$1 \in \mathbb{N}$ (Axioma 1: 1 este un număr natural).
1[a](P6). $\supset$:	$1 \in \mathbb{N} . \supset . 1 + 1 \in \mathbb{N}$	(2)	1a:	Din axioma 6 ($a \in \mathbb{N} \supset a + 1 \in \mathbb{N}$) înlocuind a cu 1, se obține: $1 \in \mathbb{N} \supset 1 + 1 \in \mathbb{N}$ Dacă 1 este un număr natural, atunci succesorul lui 1, adică $1 + 1$, este un număr natural).
(1)(2). $\supset$:	$1 + 1 \in \mathbb{N}$	(3)	(1)(2):	Din (1) și (2) rezultă: $1 + 1 \in \mathbb{N}$ Succesorul lui 1 este un număr natural.
P10 . $\supset$:	$2 = 1 + 1$	(4)	P10:	Din definiția 10, întrucât 2 este succesorul lui 1, $2 = 1 + 1$.
(4).(3). (2, 1 + 1) [a, b] (P5) : $\supset$:	$(2, 1 + 1)[a, b](P5) : \supset : 2 \in \mathbb{N}$ (Theor.)	(4)(3)	(4)(3)	$(2, 1 + 1)a, b$: Folosind axioma 5 ($a = b \wedge b \in \mathbb{N} \supset a \in \mathbb{N}$) cu $a = 2$ și $b = 1 + 1$ și combinând (3) și (4) rezultă: $2 \in \mathbb{N}$ (Teoremă).

„Nota. - Huius facillimae demonstrationis gradus omnes explicite scripsimus.
Brevitatis causa ipsam ita scribemus:”

Altfel spus:

Notă: Am scris explicit toți pașii acestei demonstrații extrem de simple.
Pentru concizie, demonstrația poate fi scrisă astfel:

Notăția originală	Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
$P1 . 1[a](P6) : \supset : 1 + 1 \in \mathbb{N} . P10 . (2, 1 + 1)[a, b] (P5) : \supset : Th.$	$P1 . 1a : \supset : 1 + 1 \in \mathbb{N} . P10 . (2, 1 + 1) a, b : \supset : Th.$

„vel:”

Sau și mai succint:



P1 .P6 : $\supset : 1 + 1 \in \mathbb{N}$.P10 .P5 : $\supset$: Th.	P1 . P6 : $\supset : 1 + 1 \in \mathbb{N}$. P10 . P5 : $\supset$: Th.
--	---

Notăția originală		Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
12.	$3, 4 \dots \in \mathbb{N}$.	$3, 4 \dots \in \mathbb{N}$ sau: Pentru orice $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ Adică, 3, 4 ... sunt elemente ale lui $\mathbb{N}$
13.	$a, b, c, d \in \mathbb{N} . a = b . b = c . c = d : \supset : a = d$.	Tranzitivitatea egalității: Dacă a, b, c, d sunt numere naturale și a este egal cu b, b este egal cu c și c este egal cu d, atunci a este egal cu d. $a, b, c, d \in \mathbb{N} \wedge a = b \wedge b = c \wedge c = d \rightarrow a = d$ Ceea ce reprezintă un soi de formalizare a tranzitivității egalității.
	Dem. Hyp.P4 : $\supset : a, c, d \in \mathbb{N} . a = c . c = d$.P4 : $\supset$: Thes.	Din ipoteză și folosind proprietatea P4, rezultă că a, c, d sunt numere naturale și a este egal cu c, iar c este egal cu d. Aplicând din nou P4, se obține concluzia. Ori: Din ipoteză și $P4 \rightarrow a, c, d \in \mathbb{N} \wedge a = c \wedge c = d$ Aplicând P4 rezultă concluzia.
14.	$a, b, c \in \mathbb{N} . a = b . b = c . a \neq c := \perp$.	Contradicție prin tranzitivitate: Dacă a, b, c sunt numere naturale și a este egal cu b, b este egal cu c, dar a nu este egal cu c, atunci avem o contradicție. $a, b, c \in \mathbb{N} \wedge a = b \wedge b = c \wedge a \neq c \rightarrow \perp$ Aceasta este o teoremă de tip „reductio ad absurdum”, prin care se demonstrează că



		ipoteza conduce la contradicție, deci este imposibilă. În esență, confirmă că egalitatea este tranzitivă și consistentă.
	Dem. P4 . L39 : $\supset$. Theor.	Din proprietatea P4 (tranzitivitatea egalității) și lema 39, rezultă o contradicție, deci teorema este validă. Din P4 și L39 rezultă o contradicție.
15.	$a, b, c \in \mathbb{N} . a = b . b \neq c : \supset . a \neq c$.	Substituția în inegalitate Dacă a, b, c sunt numere naturale și a este egal cu b, dar b nu este egal cu c, atunci a nu este egal cu c. Sau: Dacă două numere sunt egale, atunci au aceeași relație de inegalitate cu orice al treilea număr. $a, b, c \in \mathbb{N} \wedge a = b \wedge b \neq c \rightarrow a \neq c$ Aceasta este o consecință directă a substituției în egalitate. Dacă se știe că $a = b$, atunci se poate înlocui a cu b (sau invers) în orice expresie. Deci dacă $b \neq c$, atunci și $a \neq c$, pentru că a și b sunt același număr.
16.	$a, b \in \mathbb{N} . a + 1 = b + 1 : \supset . a = b$.	Injectivitatea funcției succesor: Dacă a și b sunt numere naturale și succesorii lor sunt egali ($a + 1 = b + 1$) atunci a și b sunt egale. Sau mai simplu: Dacă două numere au același succesor, atunci numerele sunt egale. $a, b \in \mathbb{N} \wedge a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$ Sau în notație peanoiană modernă, folosind



		funcția succesor: $a, b \in \mathbb{N} \wedge S(a) = S(b) \rightarrow a = b$ Aceasta este una din axiomele fundamentale Peano - funcția succesor este injectivă (unul-la-unul). Cu alte cuvinte, în timp ce numere egale au succesori egali, numere diferite au succesori diferiți. Spre exemplu: Dacă, $a=b=1$ atunci $S(a) = S(b) = S(1) = 2$ Deci. Doar dacă $S(a) = S(b)$, atunci $a = b$ Dar, dacă: $a \neq b \text{ atunci și } S(a) \neq S(b)$ Spre exemplu: Dacă, $a=1$ iar $b=3$ atunci $S(a) = 2$ iar $S(b) = 4$, deci $a \neq b$. Ori altfel spus: Dacă se obține același rezultat adăugând 1 la două numere, atunci numerele erau egale. Dar, dacă nu se obține același rezultat adăugând 1 la două numere, atunci numerele nu erau egale. Iar, tocmai aceasta este o condiția esențială pentru a se putea garanta că numerele naturale formează o progresie unică și bine definită: 0, 1, 2, 3 ... Doar că, domnia sa dedică – explicit - următorul paragraf tocmai cazului în care două numere nu sunt egale, pe care abia l-am sugerat.
17.	$a, b \in \mathbb{N} . \supset : a - = b . = . a + 1 - = b + 1 .$	Echivalența inegalității cu succesorii



		Pentru orice numere naturale a și b: a este diferit de b dacă și numai dacă succesorii lor sunt diferiți ($a + 1 \neq b + 1$). $a, b \in \mathbb{N} \rightarrow (a \neq b \leftrightarrow a + 1 \neq b + 1)$ Sau în notație peanoiană modernă, folosind funcția succesor: $a, b \in \mathbb{N} \rightarrow (a \neq b \leftrightarrow S(a) \neq S(b))$ Aceasta este conversa teoremei 16. Împreună, teoremele 16 și 17 stabilesc că funcția succesor păstrează și reflectă relațiile de egalitate/inegalitate: Teorema 16: Dacă succesorii sunt egali $\rightarrow$ numerele sunt egale Teorema 17: Numerele sunt diferite $\leftrightarrow$ succesorii sunt diferiți Iar, așa ceva garantează că funcția succesor este bijectivă între $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}\{0\}$, adică o corespondență perfectă unul-la-unul.
	Dem. P7 . L21 : $\supset$. Theor.	Din P7 și L21 $\rightarrow$ Teorema.

„Definitio.”

Ori:

Definiție.

Notația originală		Notația contemporană reformulată în limbaj natural
18.	$a, b \in \mathbb{N} . \supset . a + (b + 1) = (a + b) + 1$	Proprietatea asociativă parțială a adunării Pentru orice numere naturale a și b: suma lui a cu succesorul lui b este egală cu succesorul sumei $a + b$. Sau: Adăugarea lui 1 la al doilea termen este echivalentă cu adăugarea lui 1 la întreaga sumă. $\forall a, b \in \mathbb{N} : a + (b + 1) = (a + b) + 1$



	Sau: $\forall a, b \in \mathbb{N} : a + S(b) = S(a + b)$ Iar, aceasta este o definiție recurentă fundamentală a adunării în aritmetica Peano. Și „stabilește cum se comportă” adunarea când al doilea operand este un succesor. Precum spre exemplu: $3 + (2 + 1) = 3 + 3 = 6$ $(3 + 2) + 1 = 5 + 1 = 6$ De fapt, prin așa ceva se garantează că ordinea aplicării succesorului nu afectează rezultatul, ceea ce este esențial pentru consistența definiției adunării în sistemul axiomatic peanoian.
--	---

„Nota. - Hanc definitionem ita legere oportet: si a et b sunt numeri, et $(a+b) + 1$ sensum habet (scilicet si $a + b$ est numerus) sed $a + (b + 1)$ nondum definitus est, Tunc $a + (b + 1)$ significat numerum qui $a + b$ sequitur.

Ab hac definitione, et a praecedentibus deducitur:”

Notă: Această definiție trebuie citită astfel: dacă a și b sunt numere naturale și $(a + b) + 1$ are sens (adică $a + b$ este un număr natural) dar $a + (b + 1)$ nu este încă definit, atunci $a + (b + 1)$ reprezintă numărul care urmează lui $a + b$ (adică succesorul lui $a + b$).

Din această definiție și din cele precedente se deduce:

Notăția originală	Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
$a \in \mathbb{N} \cdot \supset \therefore a + 2 = a + (1 + 1) = (a + 1) + 1$	Dezvoltarea recurentă a adunării
$a \in \mathbb{N} \cdot \supset \therefore a + 3 = a + (2 + 1) = (a + 2) + 1$, etc.	Pentru orice număr natural a: a plus 2 este egal cu a plus (1 plus 1) care este egal cu (a plus 1) plus 1 a plus 3 este egal cu a plus (2 plus 1) care este egal cu (a plus 2) plus 1 Și așa mai departe pentru orice număr natural. $\forall a \in \mathbb{N} :$ $a + 2 = a + (1 + 1) = (a + 1) + 1$



	$a + 3 = a + (2 + 1) = (a + 2) + 1$... $\forall n \in \mathbb{N} : a + (n + 1) = (a + n) + 1$ Sau în notația cu funcția succesor: $\forall a \in \mathbb{N} :$ $a + S(S(0)) = a + S(1) = S(a + 1)$ $a + S(S(S(0))) = a + S(2) = S(a + 2)$... Aceasta demonstrează cum teorema 18 se aplică recursiv, pentru a defini adunarea cu orice număr natural: $2 = 1 + 1$ (definiția lui 2) $3 = 2 + 1$ (definiția lui 3) ... și așa mai departe. Și prin aplicarea repetată a teoremei 18, putem calcula $a + N$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ prin aplicări successive ale operației succesor. Precum spre exemplu: $5 + 3 = 5 + (2 + 1) = (5 + 2) + 1 = (5 + (1 + 1)) + 1 = ((5 + 1) + 1) + 1 = ((6) + 1) + 1 = (7) + 1 = 8$
--	---

„Theoremata.”

Teoreme.

Notăția originală			Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
19.	$a, b \in \mathbb{N} . \supset . a + b \in \mathbb{N} .$		Adunarea este „închisă” în $\mathbb{N}$: Pentru orice numere naturale a și b , suma lor $a + b$ este tot un număr natural.
Dem.	$a \in \mathbb{N} . P6 : \supset : a + 1 \in \mathbb{N} : \supset : 1 \in [b \in] (1)$ Ts.		Demonstrația am re-interpretat-o în accepțiuni contemporane:
	$a \in \mathbb{N} . \supset :: b \in \mathbb{N} . b \in [b \in] Ts : \supset : a + b \in \mathbb{N} . P6$ Ts.	(2)	Cazul de bază: Pentru $b = 1$:
	$a \in \mathbb{N} . (1).(2) . \supset :: 1 \in [b \in] Ts \therefore b \in \mathbb{N} . b \in [b \in] Ts : \supset : b + 1 \in [b \in] Ts \therefore ([b \in] Ts)[k] P9 :: \supset : \mathbb{N} [\supset b \in] Ts . (L50)$	(3)	Din $a \in \mathbb{N}$ și P6 (axioma succesorului) $\rightarrow a + 1 \in \mathbb{N}$



	$:: \exists b \in \mathbb{N} . \exists Ts.$		Pasul inductiv: Presupunem $a + b \in \mathbb{N}$ și demonstrăm $a + (b + 1) \in \mathbb{N}$:
	(3). (L42) : $\exists a, b \in \mathbb{N} . \exists .$ Thesis.	(Theor.)	Din ipoteza inductivă: $a + b \in \mathbb{N}$ Din P6: $(a + b) + 1 \in \mathbb{N}$ Din teorema 18: $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ Prin substituție: $a + (b + 1) \in \mathbb{N}$ Concluzie: Din principiul inducției (P9) $\rightarrow \forall b \in \mathbb{N} : a + b \in \mathbb{N}$
20. Def.	$a + b + c = (a + b) + c .$		Ordinea operațiilor pentru adunarea multiplă: Prin „convenție”, expresia $a + b + c$ se interpretează ca $(a + b) + c$, adică se efectuează mai întâi operația $a + b$, apoi se adaugă c la rezultat. $a + b + c := (a + b) + c$ Aceasta este o convenție de notație care stabilește asociativitatea pentru adunările multiple. Iar, în lipsa parantezelor, operațiile se efectuează de la stânga la dreapta. Precum spre exemplu: $5 + 3 + 2$ înseamnă $(5 + 3) + 2 = 8 + 2 = 10$ nu înseamnă $5 + (3 + 2) = 5 + 5 = 10$ Și deși în acest caz, rezultatul este același (datorită asociativității adunării) totuși „convenția” este importantă pentru: a. Consistența notației b. Ordinea de calcul în algoritmi c. Extinderea la operații non-asociative



		De fapt, aceasta este o definiție pur notatională prin care se stabilește cum să citim și să interpretăm expresiile matematice. Si nicidecum nu sugerează posibile noi proprietăți ale adunării.
21.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \supset . a + b + c \in \mathbb{N}.$	Rezultatul adunarii cu trei termeni „rămâne” în $\mathbb{N}$: Pentru orice numere naturale a, b și c, suma lor $a + b + c$ este tot un număr natural. $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a + b + c \in \mathbb{N}$ Sau mai explicit, folosind definiția 20: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a + b) + c \in \mathbb{N}$ Aceasta este – de fapt - o extensie directă a teoremei 19 care demonstrează că închiderea adunării se menține și pentru sume în care sunt implicați trei termeni. Și deși domnia sa nu demonstrează așa ceva, totuși s-ar putea accepta că: Din $a, b \in \mathbb{N}$ și teorema 19 $\rightarrow a + b \in \mathbb{N}$ Din $(a + b) \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}$ și teorema 19 $\rightarrow (a + b) + c \in \mathbb{N}$ Din definiția 20: $a + b + c = (a + b) + c$ Prin substituție: $a + b + c \in \mathbb{N}$ Precum, spre exemplu: $3, 5, 7 \in \mathbb{N}$ $3 + 5 + 7 = (3 + 5) + 7 = 8 + 7 = 15 \in \mathbb{N}$ Iar, prin așa ceva se confirmă stabilitatea structurală a multimii numerelor naturale asupra careia se operează adunări repetate.



22.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \mathcal{D}: a = b . = . a + c = b + c.$		Proprietatea de simplificare a adunării: Pentru orice numere naturale a, b și c: a este egal cu b dacă și numai dacă $a + c$ este egal cu $b + c$. $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a = b \leftrightarrow a + c = b + c)$ Aceasta este – de fapt - „legea simplificării pentru adunare”, prin care se poate „elimina” același termen din ambele părți ale unei egalități. Precum, spre exemplu: Dacă $5 + 2 = 5 + 2$, atunci $5 = 5$ Dacă $x + 2 = 5 + 2$, atunci $x = 5$
Dem.	$a, b \in \mathbb{N} . P7 : \mathcal{D} . 1 \in [c \in] Ts.$ $a, b \in \mathbb{N} . \mathcal{D}:: c \in \mathbb{N} . c \in [c \in] Ts \therefore \mathcal{D} \therefore$ $a = b . = . a + c = b + c:$ $a + c, b + c \in \mathbb{N} : a + c = b + c . = . a +$ $c + 1 = b + c + 1 \therefore \mathcal{D} \therefore a =$	(1)	Demonstrația am re-interpretat-o în accepțiunii contemporane: Demonstrație prin inducție după c:
	$b . = . a + (c + 1) = b + (c + 1) \therefore \mathcal{D} \therefore$ $(c + 1) \in [c \in] Ts.$ $a, b \in \mathbb{N} . (1).(2) : \mathcal{D}:: 1 \in [c \in] Ts \therefore c \in$ $[c \in] \in Ts . \mathcal{D} . (c + 1) \in [c \in]$	(2)	Cazul de bază, $c = 1$: Din $a, b \in \mathbb{N}$ și $P7$ (proprietatea substituției) $\rightarrow (a = b \leftrightarrow a + 1 = b + 1)$
	$Ts :: \mathcal{D}:: c \in \mathbb{N} . \mathcal{D} . Ts.$	(3)	Pasul inductiv: Ipoteza inductivă: $a = b \leftrightarrow a + c = b + c$ De demonstrat: $a = b \leftrightarrow a + (c + 1) = b + (c + 1)$ Din teorema 19: $a + c, b + c \in \mathbb{N}$ Din ipoteza inductivă: $a = b \leftrightarrow a + c = b + c$ Din $P7$: $a + c = b + c \leftrightarrow (a + c) + 1 = (b + c) + 1$ Din teorema 18: $a + (c + 1) = (a + c) + 1$ și $b + (c + 1) = (b + c) + 1$ Prin substituție: $a = b \leftrightarrow a + (c + 1) = b + (c + 1)$ Concluzie: Din principiul inducției $\rightarrow$ $\forall c \in \mathbb{N} : (a = b \leftrightarrow a + c = b + c)$



23.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \supset . a + (b + c) = a + b + c.$		Asociativitatea adunării: Pentru orice numere naturale a, b și c: suma lui a cu $(b + c)$ este egală cu suma $(a + b) + c$. Sau: În adunarea a trei numere, nu contează cum se grupează termenii între paranteze. $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a + (b + c) = a + b + c$ Iar, așa ceva reprezintă asociativitatea adunării, una dintre proprietățile fundamentale care permite să se scrie $a + b + c$ fără paranteze, știind că rezultatul este același indiferent de ordinea calculelor. Precum, spre exemplu: $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$ $(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$
Dem.	$a, b \in \mathbb{N} . P18 . P20 : \supset . 1 \in [c \in] \text{ Ts.}$ $a, b \in \mathbb{N} . \supset . \therefore c \in \mathbb{N} . c \in [c \in] \text{ Ts} : \supset : a + (b + c) = a + b + c . P7$ $: \supset : a + (b + c) + 1 = a + b + c + 1 . P18$	(1)	Demonstrația am re-interpretat-o în accepțiuni contemporane: Demonstrație prin inducție după c: Cazul de bază, $c = 1$:
	$: \supset : a + (b + (c + 1)) = a + b + (c + 1) :$ $\supset . c + 1 \in [c \in] \text{ Ts.}$ (1)(2) (P9) . $\supset . \text{Theor.}$	(2)	Din $a, b \in \mathbb{N}, P18$ și $P20 \rightarrow a + (b + 1) = a + b + 1$ Pasul inductiv: Ipoteza inductivă: $a + (b + c) = a + b + c$ De demonstrat: $a + (b + (c + 1)) = a + b + (c + 1)$ Din ipoteza inductivă: $a + (b + c) = a + b + c$ Din P7 (compatibilitatea cu +1): $a + (b + c) + 1 = (a + b + c) + 1$



			Din P18: $a + ((b + c) + 1) = (a + (b + c)) + 1$ Din P18: $a + (b + (c + 1)) = a + ((b + c) + 1)$ Din definiția 20: $(a + b + c) + 1 = a + b + (c + 1)$ Prin substituție: $a + (b + (c + 1)) = a + b + (c + 1)$ Concluzie: Din P9 (inducția) → teorema
24.	$a \in \mathbb{N} . \supset . 1 + a = a + 1.$		Comutativitatea adunării cu 1: Pentru orice număr natural a: 1 plus a este egal cu a plus 1. Sau: Nu contează dacă se adună 1 la începutul sau la sfârșitul unei expresii. $\forall a \in \mathbb{N} : 1 + a = a + 1$ Iar, așa ceva reprezintă – de fapt - primul pas către comutativitatea completă a adunării: „$a + b = b + a$” Precum spre exemplu: $1 + 5 = 6 = 5 + 1$ $1 + 37 = 38 = 37 + 1$
Dem.	$P2 . \supset . 1 \in [a \in] \text{ Ts.}$ $a \in \mathbb{N} . a \in [a \in] \text{ Ts}$	(1)	Demonstrația am re-interpretat-o în accepțiuni contemporane:
	$: \supset : 1 + 1 = a + 1 : \supset : 1 + (a + 1) = (a + 1) + 1 : \supset : (a + 1) \in [a \in] \text{ Ts.}$	(2)	Demonstrație prin inducție după a:
	(1)(2). $\supset . \text{Theor.}$		Cazul de bază, $a = 1$: Din P2 ($1 \in \mathbb{N}$) $\rightarrow 1 + 1 = 1 + 1$ (trivial adevărat) Pasul inductiv: Ipoteza inductivă: $1 + a = a + 1$ De demonstrat: $1 + (a + 1) = (a + 1) + 1$



			Din ipoteza inductivă: $1 + a = a + 1$ Din P18 (asociativitatea parțială): $1 + (a + 1) = (1 + a) + 1$ Din ipoteza inductivă: $(1 + a) + 1 = (a + 1) + 1$ Prin substituție: $1 + (a + 1) = (a + 1) + 1$ Concluzie: Din principiul inducției rezultă teorema.
24'.	$a, b \in \mathbb{N} . \supset . 1 + a + b = a + 1 + b.$		Deplasarea lui 1 în sume multiple: Pentru orice numere naturale a și b: suma $1 + a + b$ este egală cu suma $a + 1 + b$. Sau: Se poate deplasa numărul 1 în interiorul unei sume fără să se schimbe rezultatul. $\forall a, b \in \mathbb{N} : 1 + a + b = a + 1 + b$
Dem	Hyp. P24 : $\supset : 1 + a = a + 1$. P22 : $\supset . 4$ Thesis		Din ipoteză și P24: $1 + a = a + 1$ Din P22 (compatibilitatea cu adunarea): $1 + a + b = a + 1 + b$ Sau: Din ipoteză: $a, b \in \mathbb{N}$ Din P24: $1 + a = a + 1$ Din P22 (compatibilitatea egalității cu +b): Dacă $1 + a = a + 1$, atunci $(1 + a) + b = (a + 1) + b$ Din definiția 20 (asociativitatea ...): $1 + a + b = (1 + a) + b$ $a + 1 + b = (a + 1) + b$ Prin substituție: $1 + a + b = a + 1 + b$
25.	$a, b \in \mathbb{N} . \supset . a + b = b + a.$		Legea comutativității adunării:



			Pentru orice numere naturale a și b: a plus b este egal cu b plus a. Sau: Ordinea termenilor în adunare nu contează. $\forall a, b \in \mathbb{N} : a + b = b + a$ Aceasta este una dintre cele mai importante teoreme ale aritmeticii – prin care se demonstrează că adunarea este comutativă. Precum, spre exemplu: $3 + 7 = 10 = 7 + 3$ $15 + 28 = 43 = 28 + 15$
Dem.	$a \in \mathbb{N} . P24 : \supset : 1 \in [b \in] Ts. (1)$ $a \in \mathbb{N} . \supset \therefore b \in \mathbb{N} . b \in [b \in] Ts : \supset : a + (2)$ $b = b + a . P7$ $: \supset : (a+b)+1 = (b+a)+1 . (a+b)+1 = a+(b+1).(b+a)+1 =$ $1 + (b+a). 1 + (b+a) = (1 + b) + a . (1 + b) + a = (b + 1) + a :$ $\supset : a + (b + 1) = (b + 1) + a : \supset : (b + 1) \in [b \in] Ts.$		Demonstrația am re-interpretat-o în accepțiuni contemporane: Demonstrație prin inducție după b: Cazul de bază, $b = 1$: Din $a \in \mathbb{N}$ și $P24 \rightarrow a + 1 = 1 + a$
	$(1)(2). \supset . Theor.$		Pasul inductiv: Ipoteza inductivă: $a + b = b + a$ De demonstrat: $a + (b + 1) = (b + 1) + a$ Demonstrația pasului inductiv: Din $P7$ și ipoteza inductivă: $a + b = b + a \rightarrow (a + b) + 1 = (b + a) + 1$ Din $P18$: $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$ Din $P18$: $(b + a) + 1 = b + (a + 1)$ Din $P24$: $a + 1 = 1 + a$ Prin substituție: $b + (a + 1) = b + (1 + a)$ Din $P23$ (asociativitatea): $b + (1 + a) = (b + 1) + a$ Combinând: $a + (b + 1) = (b + 1) + a$ Concluzie: Din principiul inducției $\rightarrow$



		$\forall a, b \in \mathbb{N} : a + b = b + a$
26.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \mathcal{D}: a = b . = . c + a = c + b.$	Simplificarea la stânga în adunare: Pentru orice numere naturale a, b și c: a este egal cu b dacă și numai dacă $c + a$ este egal cu $c + b$. Sau: Se poate adăuga același număr la stânga ambelor părți ale unei egalități fără să schimbi validitatea acesteia. Aceasta este – de fapt - versiunea stângă a teoremei 22. Si împreună, P22 și P26 demonstrează că adunarea este complet compatibilă cu relația de egalitate, așa încât se poate adăuga același termen pe oricare parte a unei egalități. Precum, spre exemplu: Dacă $x = 5$, atunci $3 + x = 3 + 5 = 8$ Dacă $7 + y = 7 + 12$, atunci $y = 12$ (prin simplificare) Și deși domnia sa nu demonstrează așa ceva, totuși s-ar putea accepta că, considerând teoremele anterioare: Din P25 (comutativitatea): $c + a = a + c$ și $c + b = b + c$ Din P22 (compatibilitatea la dreapta): $a = b \leftrightarrow a + c = b + c$ Prin substituție comutativă: $a = b \leftrightarrow c + a = c + b$
27.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \mathcal{D}: a + b + c = a + c + b.$	„Interschimbarea” termenilor în sume triple: Pentru orice numere naturale a, b și c: suma $a + b + c$ este egală cu suma $a + c + b$. Sau:



	În suma a trei termeni, se pot interschimba al doilea și al treilea termen fără să se schimbe rezultatul. $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a + b + c = a + c + b$ Sau mai explicit, folosind definiția 20: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a + b) + c = (a + c) + b$ Iar, prin așa ceva se demonstrează flexibilitatea operațiilor în sume multiple. Și este o consecință directă a comutativității și asociativității adunării. Precum, spre exemplu: $2 + 3 + 5 = (2 + 3) + 5 = 5 + 5 = 10$ $2 + 5 + 3 = (2 + 5) + 3 = 7 + 3 = 10$ De fapt, această teoremă este primul pas spre demonstrarea faptului că oricare permutare a termenilor unei sume dă același rezultat, ceea ce reprezintă principiul fundamental al adunării ca operație comutativă pentru orice număr de termeni. Și deși domnia sa nu demonstrează așa ceva, totuși s-ar putea accepta că, considerând teoremele anterioare: Din definiția 20: $a + b + c = (a + b) + c$ și $a + c + b = (a + c) + b$ Din P25 (comutativitatea): $b + c = c + b$ Din P26 (compatibilitatea la stânga): Dacă $b + c = c + b$, atunci $a + (b + c) = a + (c + b)$ Din P23 (asociativitatea): $a + (b + c) = (a + b) + c$ $a + (c + b) = (a + c) + b$ Prin substituție:
--	--



		$(a + b) + c = a + b + c = (a + c) + b = a + c + b$
28.	$a, b, c, d \in \mathbb{N} . a = b . c = d : \supset . a + c = b + d .$	Adunarea egalităților: Pentru orice numere naturale a, b, c și d: dacă a este egal cu b și c este egal cu d, atunci $a + c$ este egal cu $b + d$. Sau: Se pot aduna egalitățile: dacă sunt două egalități separate, suma părților stângi este egală cu suma părților drepte. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N} : (a = b \wedge c = d) \rightarrow a + c = b + d$ Și reprezintă o proprietate fundamentală care permite combinarea egalităților prin adunare. Și este esențială pentru manipularile algebrice și pentru rezolvarea sistemelor de ecuații. Precum, spre exemplu: Dacă $x = 3$ și $y = 5$, atunci $x + y = 3 + 5 = 8$ Dacă $a = 7$ și $b = 12$, atunci $a + b = 7 + 12 = 19$ Dacă $2x = 6$ și $3y = 9$, atunci $2x + 3y = 6 + 9 = 15$ Și mai mult chiar, este o teoremă fundamentală pentru: Adunarea ecuațiilor în sisteme liniare Manipularea algebrică complexă Conservarea egalității în transformări matematice. Și deși domnia sa nu demonstrează așa ceva, totuși s-ar putea accepta că, considerând teoremele anterioare: Din ipoteză: $a = b$ și $c = d$



		Din P22 (compatibilitatea la dreapta): Dacă $a = b$, atunci $a + c = b + c$ Din P26 (compatibilitatea la stânga): Dacă $c = d$, atunci $b + c = b + d$ Din tranzitivitatea egalității (P4): $a + c = b + c$ și $b + c = b + d \rightarrow a + c = b + d$.
--	--	---

„§2. De subtracție.

Explicații.

Signo	–	legitur	minus.
>>	<	>>	est minor.
>>	>	>>	est maior.

Cu alte cuvinte:

§2. La scădere.

Explicații.

Simbolul	„–”	se citește	„minus”	Se specifică faptul că simbolul „–” reprezintă operația de scădere.
>>	<	>>	„este mai mic”	Se definește relația de ordine „<” ca indicând faptul că un număr este mai mic decât altul.
>>	>	>>	„este mai mare”	În mod similar, relația „>” indică faptul că un număr este mai mare decât altul.

„Definitiones.”

Definiții.



Notația originală		Interpretare contemporană
1	$a, b \in \mathbb{N} . \exists: b - a = \mathbb{N} [x \in](x + a = b).$	Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$, definim $b-a$ ca fiind un număr natural $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $x+a = b$. De fapt – tocmai - aceasta este o definiție a operației de scădere în mulțimea numerelor naturale. Iar, scăderea $b-a$ este valabilă doar dacă există un număr natural x care, adăugat la a, dă b. Spre exemplu, dacă $b= 5$ și $a= 3$, atunci $b-a= 5-3= 2$, deoarece $2+3= 5$. Dacă $b < a$, scăderea nu este definită în $\mathbb{N}$, întrucât rezultatul nu ar fi un număr natural.
2	$a, b \in \mathbb{N} . \exists: a < b . = . b - a - = \wedge .$	Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$, definim $a < b$ ca fiind echivalent cu faptul că $b-a$ este definit (adică, există un număr natural nenul). Aici, relația „mai mic” ($<$) este definită în funcție de scădere. $a < b$ înseamnă că $b - a$ este un număr natural pozitiv (nenul). Spre exemplu, $3 < 5$ deoarece $5-3= 2$, care este un număr natural pozitiv.
3	$a, b \in \mathbb{N} . \exists: b > a . = . a < b.$	Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$, definim $b > a$ ca fiind echivalent cu $a < b$. Aceasta este – de fapt - o definiție simetrică a relației „mai mare”. Dacă $a < b$, atunci $b > a$. Este o proprietate reflexivă a ordinii, care confirmă că „mai mare” este inversul relației „mai mic”

Notația originală		Interpretare contemporană
$a+b-c = (a+b)-c; a-b+c = (a-b)+c; a-b-c = (a-b)-c .$		Adică: $a+b-c = (a+b)-c;$ $a-b+c = (a-b)+c;$ $a-b-c = (a-b)-c.$ Aceste egalități definesc asociativitatea operațiilor de adunare și scădere și – totodată - specifică ordinea în care operațiile sunt efectuate:



	Pentru $a+b-c$, mai întâi se calculează $a+b$, apoi se scade c. Pentru $a-b+c$, mai întâi se calculează $a-b$, apoi se adaugă c. Pentru $a-b-c$, mai întâi se calculează $a-b$, apoi se scade c. Așa încât, aceste reguli sunt similare cu acelea din aritmetica standard și clarifică faptul că operațiile de adunare și scădere nu sunt asociative în mod direct, ci trebuie efectuate în ordinea indicată de paranteze.
--	---

„Theoremata.”

Adică:

Teoreme.

Notăția originală		Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
4.	$a, b, a', b' \in \mathbb{N} . a = a' . b = b' : \supset: b - a = b' - a' .$	Conservarea diferenței sub egalitate: $\forall a, b, a', b' \in \mathbb{N}: (a = a' \wedge b = b') \rightarrow (b - a = b' - a')$ Dacă două perechi de numere naturale sunt egale element cu element, atunci diferențele dintre elementele din fiecare pereche sunt egale. Aceasta este o proprietate fundamentală prin care se arată că operația de scădere este bine definită - nu depinde de reprezentarea numerelor, ci doar de valorile lor. Este – de fapt - echivalentul pentru scădere a proprietății că adunarea este bine definită. Precum spre exemplu: Dacă $a = 7, b = 12, a' = 7, b' = 12$, atunci $12 - 7 = 5$ și $12 - 7 = 5$ Dar, dacă $a = 5, b = 9$, dar $a' = 6, b' = 9$, atunci $9 - 5 = 4 \neq 9 - 6 = 3$



			Așa încât, această proprietate „garantează” că ecuațiile de forma $x + a = b$ au soluții unice.
Dem.	Hyp . $\exists: x + a = b$. = . $x + a' = b' : \exists$. Thesis.		Dacă: $a = a'$ și $b = b'$ Din definiția diferenței: $b - a$ este „unicul x”, astfel că $x + a = b$ Și tot așa: $b' - a'$ este „unicul x” astfel că $x + a' = b'$ Și atunci, înlocuind $a = a'$ și $b = b'$ în a doua ecuație: $x + a = b$ Și considerând „unicitatea”: $b - a = b' - a'$
5.	$a, b \in \mathbb{N} . \exists: a < b . = . b - a \in \mathbb{N}.$		Caracterizarea ordinii prin diferență: $\forall a, b \in \mathbb{N}: a < b \leftrightarrow (b - a) \in \mathbb{N}$ Un număr natural este mai mic decât altul dacă și numai dacă diferența lor este un număr natural pozitiv. Așa încât, se poate defini relația de ordine prin intermediul scăderii. Și în loc să se definească separat „<”, se poate defini existența unei diferențe pozitive. Așa încât, așa ceva „leagă” conceptul de „ordine” de cel de „operație aritmetică”. Spre exemplu: $3 < 8$ pentru că $8 - 3 = 5 \in \mathbb{N}$ Doar că: $7 < 4$ pentru că $4 - 7 = -3 \notin \mathbb{N}$ (numerele negative nu sunt în $\mathbb{N}$) Și: $6 < 6$ pentru că $6 - 6 = 0 \notin \mathbb{N}$ (zero nu este în $\mathbb{N}$, în „sistemul – clasic – Peano”) Iar, toate acestea permit determinarea ordinii numerelor prin calculul diferen-



			ței, ceea ce reprezintă fundamentul oricărui algoritm de sortare.
Dem.	$a, b \in \mathbb{N} : \supset \therefore x, y \in b-a . \supset x, y : x, y \in (1)$ $\mathbb{N} . x+a = b . y+a = b .$		În primă instanță, s-ar putea presupune că, $a < b$ și $a, b \in \mathbb{N}$
	§1 P22 : $\supset : x = y.$		
	$a, b \in \mathbb{N} . a < b . P2$ $. (1) : \supset \therefore b - a - = \wedge : x, y \in b - a .$ $\supset . x = y : (\mathbb{N}, b - a)[s, k]$ (L56) $\therefore \supset \therefore b - a \in \mathbb{N}.$	(2)	Din definiția lui „<” : $\exists x \in \mathbb{N}$ cu $x + a = b$ Dar, dată fiind definiția diferenței: $b - a = x \in \mathbb{N}$
	$a, b \in \mathbb{N} . b - a \in \mathbb{N} . (L56) : \supset : b - a - (3)$ $= \wedge : \supset : a < b.$		Apoi s-ar putea presupune că: $b - a \in \mathbb{N}$
	(2)(3). $\supset .$ Theor.		Atunci $\exists x \in \mathbb{N}$ așa încât, $x = b - a$ Dar, din definiția diferenței: $x + a = b$ Iar, prin definiția lui „<”: $a < b$ Și atunci: $b - a \in \mathbb{N}.$
6.	$a, b \in \mathbb{N} . a < b : \supset . b - a + a = b.$		Proprietatea fundamentală a scăderii: $\forall a, b \in \mathbb{N} : a < b \rightarrow (b - a) + a = b$ Dacă a este mai mic decât b , atunci adunând a la diferența $b - a$ se obține ... înapoi b . Aceasta este proprietatea de „înapoiere” a scăderii - dacă se scade ceva și apoi se adună înapoi, se obține numărul inițial. Este - de fapt - „inversul adunării” pentru cazul când scăderea este posibilă. Spre exemplu: $a = 3, b = 10: 10 - 3 = 7$ și $7 + 3 = 10$ Oricum, verificarea corectitudinii operațiilor de scădere reprezintă o metoda fundamentală în aritmetică.
Dem.	Hyp . P5 . P1 : $\supset : b - a \in \mathbb{N} . (b - a) \in [x \in](x + a = b) : \supset :$ Thes.		Din premisă s-ar putea presupune că: $a < b$ Și din teorema 5, că: $b - a \in \mathbb{N}$ Din definiția diferenței: $b - a$ este tocmai unicul $x \in \mathbb{N}$ cu $x + a = b$.



			Doar că, prin definiție: $(b - a) + a = b$ Deci: $b - a + a = b$.
7.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \exists : c = b - a . = . c + a = b .$		Echivalența definițiilor scăderii: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: c = b - a \leftrightarrow c + a = b$ Un număr c este diferența dintre b și a dacă și numai dacă c plus a este egal cu b. Așa încât, așa ceva oferă două modalități echivalente de a înțelege scăderea: fie ca operație directă ($b - a$), fie ca operația inversă a adunării (ce număr adunat la a dă b?). Precum, spre exemplu: $c = 8, a = 2, b = 10: 8 = 10 - 2 \leftrightarrow 8 + 2 = 10$ Sau: „Ce număr adunat la 15 dă 23?” $23 - 15 = 8$, verificare: $8 + 15 = 23$ Iar, așa ceva permite rezolvarea ecuațiilor de forma „$x + a = b$” prin transformare lor în forma „$x = b - a$”.
Dem.	Hyp . §1 P22 . P6 : $\exists : c = b - a . = . c + a = b - a + a . = . c + a = b .$		Direct din definiția diferenței, $b - a$ este definit ca unicul $c \in \mathbb{N}$ pentru care $c + a = b$ (când există, desigur). Deci, dacă „$c = b - a$” atunci „$c + a = b$”.
8.	$a, b \in \mathbb{N} . \exists . a + b - a = b .$		Proprietatea de „anulare”: $\forall a, b \in \mathbb{N}: a + b - a = b$ Dacă la un număr adunăm altul și apoi scădem primul, se obține al doilea număr. Aceasta este o generalizare a proprietății că operațiile de adunare și scădere se anulează reciproc când sunt aplicate



		în această ordine specifică. Precum, spre exemplu: $a = 5, b = 3: 5 + 3 - 5 = 8 - 5 = 3$ Și astfel se permite simplificarea expresiilor algebrice și manipularea formulelor.
Dem.	$(a + b, b)[b, c] \text{ P7} . \supset . \text{Theor.}$	Se aplică teorema 7 cu $c = b$ și suma $a + b$ în locul lui b Se verifică, că: $b + a = a + b$ (prin comutativitatea adunării) Asa încât, din teorema 7: $b = (a + b) - a.$ Și atunci: $b = a + b - a.$
9.	$a, b, c \in \mathbb{N} . a < b : \supset: c + (b - a) = c + b - a.$	Asociativitatea adunării și a scăderii: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: a < b \rightarrow c + (b - a) = c + b - a$ Adunarea se distribuie asupra scăderii în anumite condiții. Și astfel se extinde proprietatea distributivă la scădere, dar doar când scăderea este validă ($a < b$). Așa încât, ordinea operațiilor poate fi reorganizată fără a afecta rezultatul. Precum, spre exemplu: $a = 2, b = 7, c = 5: 5 + (7 - 2) = 5 + 5 = 10 \text{ și } 5 + 7 - 2 = 12 - 2 = 10$ Și astfel și prin așa ceva se permite simplificarea calculelor prin reorganizarea ordinii operațiilor.
Dem.	Hyp . P6 : $\supset: (b - a) + a = b : \supset: c + (b - a) + a = c + b.$ P7 : $\supset: \text{Thesis.}$	Din ipoteză $a < b$ Din teorema 5: $(b - a) \in \mathbb{N}$ Din teorema 6: $(b - a) + a = b$ Se adună c la ambele părți: $c + (b - a) + a = c + b$ Prin asociativitatea adunării: $c + (b - a) + a = (c + (b - a)) + a = c + b$



			Și dacă scade a din ambele părți: $c + (b - a) = c + b - a$.
10.	$a, b, c \in \mathbb{N} . a > b + c : \supset . a - (b + c) = a - b - c .$		Regula de scădere a unei sume.: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: a > b + c \rightarrow a - (b + c) = a - b - c$ Scăderea unei sume este egală cu scăderea succesivă a termenilor. De fapt, aceasta este „regula de scădere a unei sume”, similară cu „$-(x + y) = -x - y$” din algebra contemporană. Precum spre exemplu: $a = 20, b = 5, c = 3: 20 - (5 + 3) = 20 - 8 = 12$ și $20 - 5 - 3 = 15 - 3 = 12$ Și deși domnia sa nu demonstrează explicit așa ceva, s-ar putea – totuși – presupune că: Dacă: $a > b + c$ – din ipoteză Din teorema 5: $a - (b + c) \in \mathbb{N}$ Din teorema 6: $(a - (b + c)) + (b + c) = a$ Prin asociativitatea adunării: $(a - (b + c)) + b + c = a$ Scădem c: $(a - (b + c)) + b = a - c$ Scădem b: $a - (b + c) = a - c - b = a - b - c$ Prin comutativitatea scăderii: $a - (b + c) = a - b - c$
11.	$a, b, c \in \mathbb{N} . b > c . a > b - c : \supset . a - (b - c) = a + c - b$		Proprietatea complexă a scăderii: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (b > c \wedge a > b - c) \rightarrow a - (b - c) = a + c - b$ În anumite condiții, scăderea unei diferențe poate fi exprimată ca o combinație de adunare și scădere a termenilor. Precum, spre exemplu:



		$a = 15, b = 10, c = 3: b > c (10 > 3)$ $a > b - c (15 > 7)$ $15 - (10 - 3) = 15 - 7 = 8$ și $15 + 3 - 10 = 18 - 10 = 8$ Și deși domnia sa nu oferă o demonstrație, s-ar putea accepta totuși că: Dacă, $b > c$ și $a > b - c$ – conform ipotezei. Tot din ipoteză și teorema 5: $(b - c) \in \mathbb{N}$ Respectiv: $(a - (b - c)) \in \mathbb{N}$ Din teorema 6: $(a - (b - c)) + (b - c) = a$ Prin asociativitate: $(a - (b - c)) + b - c = a$ Se adună c la ambele părți: $(a - (b - c)) + b - c + c = a + c$ Așa încât: $a - (b - c) = a + c - b$
12.	$a, b, a', b' \in \mathbb{N} . a = a' . b = b' : \supset: a < b .$ $= . a' < b' .$	Conservarea ordinii în egalitate: $\forall a, b, a', b' \in \mathbb{N}: (a = a' \wedge b = b') \rightarrow (a < b \leftrightarrow a' < b')$ Relația de ordine se conservă pentru numere egale. Și așa ceva „garantează” că relația „<” este bine definită și depinde doar de valorile numerelor, nu și de modul în care sunt reprezentate sau numite. Precum, spre exemplu: Dacă $a = 5, b = 8, a' = 5, b' = 8$, atunci $5 < 8 \leftrightarrow 5 < 8$ Și în general: dacă $x = y$, atunci $x < z$ dacă și numai dacă $y < z$ Așa încât, așa ceva „asigură” că relațiile nu depind de notație.
Dem.	$\text{Hyp} . \supset . b - a = b' - a' . \supset . b - a \in \mathbb{N}$ $= b' - a' \in \mathbb{N} . \supset . \text{Thes.}$	1. Dacă presupunem că: $a = a'$ și $b = b'$ 2. Din teorema 4: $a = a' \wedge b = b' \rightarrow (b$



			$- a = b' - a')$ 3. Din teorema 5: $a < b \leftrightarrow (b - a) \in \mathbb{N}$ și $a' < b' \leftrightarrow (b' - a') \in \mathbb{N}$ 4. Din etapa a 2-a: $b - a = b' - a'$ 5. Prin urmare: $(b - a) \in \mathbb{N} \leftrightarrow (b' - a') \in \mathbb{N}$ 6. Din etapa a 3-a și a 5-a: $a < b \leftrightarrow a' < b'$
13.	$a, b \in \mathbb{N} . \mathcal{D} . a < a + b .$		Monotonia adunării: $\forall a, b \in \mathbb{N}: a < a + b$ Un număr natural este întotdeauna mai mic decât suma lui cu orice alt număr natural pozitiv. Așa încât, adunarea unui număr pozitiv la alt număr, acestuia îi mărește - întotdeauna - valoarea. Ceea ce reprezintă o proprietate de strictă monotonie. Precum, spre exemplu: $5 < 5 + 3 = 8$ Ori: $2 < 2 + 2 = 4$
Dem.	Hyp . P8 : $\mathcal{D} : a + b - a = b : \mathcal{D} . a + b - a \in \mathbb{N} .$ P5 : $\mathcal{D} :$ Thesis.		1. Considerăm $a, b \in \mathbb{N}$ arbitrare 2. Din teorema 8: $a + b - a = b$ 3. Prin urmare: $(a + b) - a = b$ 4. Din teorema 5: $a < a + b \leftrightarrow ((a + b) - a) \in \mathbb{N}$ 5. Din etapa a 2-a: $(a + b) - a = b$ 6. Cum $b \in \mathbb{N}$, avem $((a + b) - a) \in \mathbb{N}$ 7. Prin urmare: $a < a + b$
14.	$a, b, c \in \mathbb{N} . a < b . b < c : \mathcal{D} . a < c .$		Tranzitivitatea relației de ordine: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (a < b \wedge b < c) \rightarrow a < c$ Așa încât, dacă a este mai mic decât b și b este mai mic decât c, atunci a este mai mic decât c. Iar, aceasta este proprietatea fundamentală de tranzitivitate, care permi-



			te „înlanțuirea” inegalităților și face posibile demonstrațiile prin comparații succesive. Precum, spre exemplu: $3 < 7 \text{ și } 7 < 12, \text{ prin urmare } 3 < 12$ $1 < 5 \text{ și } 5 < 10, \text{ prin urmare } 1 < 10$ Și pur și simplu astfel se permite sortarea oricăror elemente ale oricărei mulțimi, întrucât dacă se știe că $a < b < c$, se pot ordona direct: a, b, c.
Dem.	Hyp . $\mathcal{D}$: $b - a \in \mathbb{N} . c - b \in \mathcal{D}$: $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{N} : \mathcal{D}$: $c - a \in \mathbb{N} : \mathcal{D}$. Thesis.		Presupunem $a < b$ și $b < c$ – conform ipotezei Din teorema 5: $(b - a) \in \mathbb{N}$ și $(c - b) \in \mathbb{N}$ Din „închiderea $\mathbb{N}$ la adunare”: $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{N}$ Prin asociativitate: $(b - a) + (c - b) = b - a + c - b = c - a$ Prin urmare: $(c - a) \in \mathbb{N}$ Iar – în cele din urmă - din teorema 5: $a < c$
15	$a, b, c \in \mathbb{N} . \mathcal{D}: a < b . = . a + c < b + c .$		Conservarea ordinii prin adunare: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: a < b \leftrightarrow a + c < b + c$ Așa încât, adunarea aceluiași număr la ambii termeni ai unei inegalități conservă inegalitatea. Deci, adunarea este o operație „monotonă” – adică, „respectă ordinea valorilor”. Precum spre exemplu $3 < 5 \leftrightarrow 3 + 10 < 5 + 10 \leftrightarrow 13 < 15$ Ori: $7 < 12 \leftrightarrow 7 + 4 < 12 + 4 \leftrightarrow 11 < 16$ Iar, așa ceva reprezintă o proprietate fundamentală pentru rezolvarea inegalităților.
Dem.	Hyp . $\mathcal{D}$: $a < b . = . b - a \in \mathbb{N} . = . (b + c) - (a + c) \in \mathbb{N} . =$ $. a + c < b + c$		În primul rând dacă s-ar presupune că, conform ipotezei, $a < b$ 1. Din teorema 5: $(b - a) \in \mathbb{N}$ 2. Doar, că: $(b + c) - (a + c) = b + c - a$



		- $c = b - a$ 3. Iar, din prima etapă: $(b + c) - (a + c) = b - a \in \mathbb{N}$ 4. Din teorema 5: $a + c < b + c$ Iar, în al doilea rând, în perspectivă ... „reciprocă”: Dacă se presupune că, $a + c < b + c$ 1. Din teorema 5: $((b + c) - (a + c)) \in \mathbb{N}$ 2. Prin calcul: $(b + c) - (a + c) = b - a$ 3. Prin urmare: $(b - a) \in \mathbb{N}$ 4. Din teorema 5: $a < b$
16.	$a, b, a', b' \in \mathbb{N} . a < b . a' < b' : \supset . a + a' < b + b' .$	Adunarea inegalităților: $\forall a, b, a', b' \in \mathbb{N}: (a < b \wedge a' < b') \rightarrow a + a' < b + b'$ Deci, suma a două inegalități de același sens dă o inegalitate de același sens. Așa încât, așa ceva permite „adunarea” inegalităților Precum, spre exemplu: $3 < 5$ și $7 < 10$, prin urmare $3 + 7 < 5 + 10$, adică $10 < 15$
Dem.	Hyp . $\supset: a + a' < b + a' . b + a' < b + b' : \supset .$ Thesis.	1. S-ar presupune $a < b$ și $a' < b'$ – conform ipotezelor, desigur 2. Din teorema 15: $a < b \rightarrow a + a' < b + a'$ 3. Din teorema 15 aplicată la $a' < b'$: $a' + b < b' + b$ 4. Prin comutativitate: $b + a' < b + b'$ 5. Din etapa a 2-a și a 4-a și prin Teorema 14 (a tranzitivității): $a + a' < b + a' < b + b'$ 6. Și tot prin tranzitivitate: $a + a' < b + b'$
17.	$a, b, c \in \mathbb{N} . a < b < c : \supset . c - a > c - b .$	Monotonia inversă a scăderii: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: a < b < c \rightarrow c - a > c - b$ Așa încât, cu cât se scade mai puțin



		dintr-un număr, cu atât diferența este mai mare. Iar, așa ceva arată că scăderea are proprietatea de „anti-monotonie” în primul argument, întrucât cu cât scade mai puțin, cu atât rezultatul este mai mare. Precum, spre exemplu: $2 < 5 < 10: 10 - 2 = 8 > 10 - 5 = 5$ Ori: $3 < 7 < 15: 15 - 3 = 12 > 15 - 7 = 8$
Dem.	Hyp. $\exists b - a \in \mathbb{N} . c - b \in \mathbb{N} . (c - b) + (b - a) = c - a : \exists .$ Thesis.	Dacă se presupune – conform ipotezei - că, $a < b < c$ Din teorema 5: $(b - a) \in \mathbb{N}$ și $(c - b) \in \mathbb{N}$ Din teorema 14: $a < c$, prin urmare $(c - a) \in \mathbb{N}$ Doar că, $(c - a) = (c - b) + (b - a)$ Iar, din „închiderea $\mathbb{N}$ la adunare” și din ceea ce a rezultat din teorema 5: $(c - a) > (c - b)$ Sau prin teorema 16 aplicată la $(c - b)$ și $(b - a)$: $(c - b) + (b - a) > (c - b) + 0 = (c - b)$ Prin urmare: $c - a > c - b$
18.	$a \in \mathbb{N} . \exists: a = 1 . \cup . a > 1.$	Dicotomia pentru numerele naturale: $\forall a \in \mathbb{N}: a = 1 \vee a > 1$ Orice număr natural este fie egal cu 1 (cel mai mic), fie mai mare decât 1. Iar, așa ceva subliniază faptul că, în axiomaticele peanoiană, 1 este cel mai mic număr natural și toate celelalte sunt mai mari.



		Și nici nu există numere între 0 și 1 în $\mathbb{N}$. Precum spre exemplu: $a = 1: a = 1$ $a = 2: a > 1$ $a = 3: a > 1$ $a = 4: a > 1$ Și este o proprietate fundamentală pentru inducția matematică, întrucât orice proprietate care este adevărată pentru 1 și se transmite la următorul poate fi demonstrată pentru toate numerele naturale.
Dem.	$1 \in [a \in]$ Thesis. $a \in \mathbb{N} . P13 : \supset: a + 1 > 1 : \supset: a + 1 \in [a \in]$ Thesis. (1)(2). $\supset .$ Theor.	Doar că, demonstrația se face tot prin inducție: Pentru $a = 1$: evident, $1 = 1$ Pasul inductiv: Presupunem că proprietatea este adevărată pentru toate numerele $\leq n$. Deci, pentru $a = N + 1$: Din construcția numerelor naturale: $N + 1 > N \geq 1$ Prin urmare: $N + 1 > 1$ Și în concluzie: $a = N + 1 > 1$ Deci, inducția privind, $\forall a \in \mathbb{N}: a = 1 \vee a > 1$
19.	$a, b \in \mathbb{N} . \supset . a + b - = b.$	„Non-idempotența adunării stricte”: $\forall a, b \in \mathbb{N}: a + b \neq b$ Adunarea unui număr natural la altul nu poate da rezultatul egal cu al doilea număr. Deci nu există vreun „număr neutru” pentru adunare în $\mathbb{N}$ (pentru că $0 \notin \mathbb{N}$ în sistemul peanoian). Așa încât, prin



			adunare se mărește întotdeauna valoarea rezultatului. Precum, spre exemplu: $2 + 2 = 4 \neq 2$ Ori: $3 + 5 = 8 \neq 5$ În timp ce: $2 + 0$ deși este egal cu 2, totuși $0 \notin \mathbb{N}$ Așa încât, pentru orice $a \in \mathbb{N}$: $1 + a = a + 1 \neq a$
Dem.	$a \in \mathbb{N} . \S 1 P8 : \supset : a + 1 - = 1 : \supset : 1 \in [b$ (1) $\epsilon]$ Thesis		Demonstrația s-ar putea face tot într-o paradigmă inductivă:
	$a \in \mathbb{N} . b \in \mathbb{N} . b \in [b \epsilon] Ts : \supset : a + b - =$ (2) $b . \S 1 P17$ $: \supset : a + (b + 1) - = b + 1 : \supset : b + 1 \in [b$ $\epsilon] Ts.$ $(1)(2) . \supset . Theor$		Pentru $b = 1$: $a + 1 \neq 1$ (prin axiomele peanoiene - succesorul lui 0 nu este 0) Pasul inductiv: Presupunem $a + b \neq b$ Atunci $a + (b + 1) = (a + b) + 1 \neq b + 1$ (prin proprietatea succesorului)

Iar, prin următoarele trei teoreme se subliniază faptul că, „relațiile de ordine diferite sunt «mutual» exclusive.

Așa încât, prin toate acestea stabilește că relațiile „<”, „= ” și „>” sunt mutual exclusive - nu pot fi simultan adevărate pentru aceeași pereche de numere.

20.	$a, b \in \mathbb{N} . a < b . a = b := \wedge$		$\forall a, b \in \mathbb{N} : a < b \rightarrow a \neq b$
Dem.	Hyp : $\supset : b - a \in \mathbb{N} . (b - a) + a = a . P19$ $: \supset : \wedge$		Și așa ceva se poate demonstra prin contradicție: Dacă: $a < b$ și $a = b$ Din $a = b$: $b - a = a - a = 0$ Din $a < b$ și Teorema 5: $(b - a) \in \mathbb{N}$ Doar că, întrucât: $0 \notin \mathbb{N}$, dar $(b - a) \in \mathbb{N}$ apare o „contradicție” Prin urmare: $a < b \rightarrow a \neq b$
21.	$a, b \in \mathbb{N} . a > b . a = b := \wedge$		$\forall a, b \in \mathbb{N} : a > b \rightarrow a \neq b$ Și deși domnia sa nu demonstrează așa



			ceva, s-ar putea presupune totuși că, demonstrația este „simetrică” cu aceea abia propusă.
22.	$a, b \in \mathbb{N} . a > b . a < b := \wedge$		$\forall a, b \in \mathbb{N}: a > b \rightarrow \neg(a < b)$ Și deși domnia sa nu demonstrează așa ceva, totuși s-ar putea presupune că, tot prin contradicție: Dacă: $a > b$ și $a < b$ Din teorema 14 (a „tranzitivității”): $a < b < a \rightarrow a < a$ Doar că, din teorema 5: $a < a \leftrightarrow (a - a) \in \mathbb{N} \leftrightarrow 0 \in \mathbb{N}$ Și cum ... $0 \notin \mathbb{N}$ Prin urmare: $a > b \rightarrow \neg(a < b)$
23.	$a, b \in \mathbb{N} : \supset: a < b . \cup . a = b . \cup . a > b.$		„Tricotomia” ori „Legea comparabilității”: $\forall a, b \in \mathbb{N}: a < b \vee a = b \vee a > b$ De fapt, pentru orice două numere naturale, este adevărată exact una dintre relațiile: primul este mai mic, egal sau mai mare decât al doilea. Iar, aceasta este proprietatea de „comparabilitate totală” - orice două numere naturale pot fi comparate și comparația dă exact una dintre cele trei posibilități. Deci, nu există numere „necomparabile”. Precum, spre exemplu: Pentru 5 și 8: $5 < 8$ (nu $5 = 8$, nu $5 > 8$) Pentru 2 și 2: $2 = 2$ (nu $2 < 2$, nu $2 > 2$) Iar, așa ceva reprezintă o metodă pentru: Sortare: Orice listă de numere poate fi sortată pentru că orice două numere pot fi comparate. Luarea deciziilor: În orice situație în



			care se poate face o comparare (vârste, prețuri, scoruri), există întotdeauna o relație clară. Algoritmi: Permite algoritmilor de căutare binară să funcționeze eficient. Așa încât, pe aceasta teoremă se bazează „ordinea perfectă” a numerelor naturale.
Dem.	$a \in \mathbb{N} . P18 : \supset . 1 \in [b \in] Ts.$	(1)	Iar, așa ceva s-ar putea demonstra tot prin inducție (asupra lui b, cu a fix). Cazul de bază: $b = 1$ Pentru orice $a \in \mathbb{N}$, trebuie să arătăm că: $a < 1 \vee a = 1 \vee a > 1$ Dacă $a = 1$, atunci $a = b$ Dacă $a \neq 1$, atunci fie $a = 0$ (deci $a < 1$), fie $a > 1$ În sistemul peanoean: 1 este primul număr natural - după 0, va fi admis în interpretările ulterioare. Prin proprietățile axiomelor: orice $a \in \mathbb{N}$ satisface exact una din relații
	$a, b \in \mathbb{N} . a < b : \supset . a < b + 1.$	(2)	
	$a, b \in \mathbb{N} . a = b : \supset . a < b + 1.$	(3)	
	$a, b \in \mathbb{N} . a > b : \supset : a - b \in \mathbb{N} . P18 : \supset : a - b = 1 . \cup . a - b > 1.$	(4)	
	$a, b \in \mathbb{N} . a - b = 1 : \supset . a = b + 1.$	(5)	
	$a, b \in \mathbb{N} . a - b > 1 : \supset . a > b + 1.$	(6)	
	$a, b \in \mathbb{N} . a > b . (4)(5)(6) : \supset : a = b + 1 . \cup . a > b + 1 .$	(7)	
	$a, b \in \mathbb{N} : a > b . \cup . a = b . \cup . a > b : (8) (2)(3)(7) \therefore \supset \therefore a < b + 1 . \cup . a = b + 1 . \cup . a > b + 1.$	(8)	
	$a, b \in \mathbb{N} . b \in [b \in] Ts . (8) : \supset : b + 1 \in [b \in] Ts.$	(9)	
	(1)(9). $\supset . Theor.$		Pasul inductiv: S-ar putea presupunem că, teorema este adevărată pentru b (ipoteza inductivă): $\forall a \in \mathbb{N} : (a < b) \vee (a = b) \vee (a > b)$ Și ar trebui să se demonstreze că, pentru $b + 1$: $\forall a \in \mathbb{N} : (a < b + 1) \vee (a = b + 1) \vee (a > b + 1)$ Din ipoteza inductivă, pentru orice a, există trei cazuri: Cazul 1: $a < b$ Prin definiție: $\exists k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ cu $a + k = b$ Atunci $a + k + 1 = b + 1$, deci $a < b + 1$



		Cazul 2: $a = b$ Atunci $a + 1 = b + 1$, deci $a < b + 1$ Cazul 3: $a > b$ Din demonstrația originală (liniile 4-7): $a > b \rightarrow a - b \in \mathbb{N}$ Prin teorema 18 (tricotomia pentru diferențe): $(a - b = 1) \vee (a - b > 1)$ Sub-cazul 3.1: $a - b = 1$ Atunci $a = b + 1$ Sub-cazul 3.2: $a - b > 1$ Atunci $a > b + 1$ Demonstrarea unicității (exact una din relații): Prin proprietățile ordinii și egalității: $a < b \wedge a = b$ este imposibil (a nu poate fi mai mic decât el însuși) $a < b \wedge a > b$ este imposibil (contradicție directă) $a = b \wedge a > b$ este imposibil (a nu poate fi mai mare decât el însuși) Concluzie: Prin inducție matematică, teorema este demonstrată pentru toate numerele naturale. De fapt, demonstrația domnului Peano se bazează pe teorema 18 (care stabilește tricotomia pentru diferențe) și pe proprietățile fundamentale ale succesorului în axiomele sale.
--	--	---

„§3. De maximis et minimis.

Explicationes.



Sit $a \in K N$, hoc est sit a quaedam numerorum classis; tunc Ma legatur maximus inter a, et Wa legatur minimus inter a.

Definitiones.”

§3. Despre maxime și minime.

Explicații.

Fie $a \in N$, adică a este o submulțime a numerelor naturale. Atunci, $\max(a)$ (notat Ma) este maximul lui a, iar $\min(a)$ (notat Wa) este minimul lui a.

Definiții.

Notația originală		Interpretare contemporană
1.	$a \in K N . \exists: Ma = [x \in a] (x \in a . \therefore a . > x := \wedge)$.	Maximul clasei a Fie $a \in K N$. Atunci: $Ma = x$ dacă $x \in a$ și $\forall y \in a, y \leq x$ Dacă a este o clasă de numere naturale (adică o mulțime de numere naturale, unde numerele naturale sunt $\{1, 2, 3 \dots\}$) maximul Ma este un număr x din clasa a astfel încât toate celelalte numere y din a sunt mai mici sau egale cu x. Cu alte cuvinte, x este cel mai mare element al clasei a. Și astfel se definește Ma, maximul clasei a, care este un element x din a care este mai mare sau egal decât orice alt element y din a. În accepții contemporane, aceasta este definiția standard a maximului unei mulțimi: x este maximul dacă $x \in a$ și nu există niciun $y \in a$ cu $y > x$.
2.	$a \in K N . \exists: Wa = [x \in a] (x \in a . \therefore a . < x := \wedge)$.	Fie $a \in K N$. Atunci: $Wa = x$ dacă $x \in a$ și $\forall y \in a, y \geq x$ Dacă a este o clasă de numere naturale (adică o mulțime de numere naturale, unde numerele naturale sunt $\{1, 2, 3 \dots\}$) minimul Wa este un număr x din clasa a astfel încât toate celelalte numere y din a sunt mai mari sau egale cu x. Cu alte cuvinte, x este cel mai mic element al clasei a.



		Și astfel se definește W_a, minimul clasei a, care este un element x din a care este mai mic sau egal decât orice alt element y din a. În accepții contemporane, aceasta este definiția standard a minimului unei mulțimi: x este minimul dacă $x \in a$ și nu există niciun $y \in a$ cu $y < x$.
--	--	---

„Theoremata.”

Teoreme.

Notăția originală		Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
3.	$n \in \mathbb{N} . a \in K \mathbb{N} . a - = \wedge . a \ni > n = \wedge : \supset . Ma \in \mathbb{N} .$ DE VERIFICAT GROK (GEMINI OK, CHAT NU!)	Dacă n este un număr natural și a este o clasă nevidă de numere naturale care nu este conținută în mulțimea $\{1, 2 \dots n\}$ (adică nu este mărginită superior de n) atunci clasa a are un maxim Ma, iar acest maxim este un număr natural. Fie $n \in \mathbb{N}, a \in K \mathbb{N}$. Dacă $a \neq \emptyset$ și $a \not\subseteq \{1, 2 \dots n\}$, atunci $Ma \in \mathbb{N}$
Dem.	$a \in K \mathbb{N} . a - = \wedge . a \ni > 1 = \wedge : \supset : a = \{1\} : \supset . Ma = 1 : \supset . Ma \in \mathbb{N} .$	Cazul de bază: $a \in K \mathbb{N} . a \neq \emptyset . a \subseteq \{1\} : \rightarrow Ma = 1 \in \mathbb{N}$ Pasul de inducție: $n \in \mathbb{N} . a \in K \mathbb{N} . a \not\subseteq \{1, 2 \dots n+1\} . n+1 \in a : \rightarrow Ma = n+1 \in \mathbb{N}$ Cazul alternativ: $n \in \mathbb{N} . a \in K \mathbb{N} . a \not\subseteq \{1, 2 \dots n+1\} . n+1 \notin a : \rightarrow a \subseteq \{1, 2 \dots n\}$ Concluzie prin inducție: $\forall n \in \mathbb{N} : a \in K \mathbb{N} . a \neq \emptyset . a \not\subseteq \{1, 2 \dots n\} : \rightarrow Ma \in \mathbb{N}$
	$(1) \supset : 1 \in [n \in] (Hp \supset Ts) .$	
	$n \in \mathbb{N} . a \in K \mathbb{N} . a \ni > n+1 = \wedge . n+1 \in a : \supset : n+1 = Ma : \supset : Ma \in \mathbb{N}$	
	$n \in \mathbb{N} . a \in K \mathbb{N} . a \ni > n+1 = \wedge . n+1 \in a : \supset : n+1 = Ma : \supset : Ma \in \mathbb{N}$	
	$n \in [n \in] (Hp \supset Ts) . a \in K \mathbb{N} . a \ni > n+1 = \wedge . n+1 \in a : \supset : Ma \in \mathbb{N} .$	
	$n \in [n \in] (Hp \supset Ts) . (6) : \supset . (n+1) [n \in] (Hp \supset Ts) .$	
	$(2)(7) . \S 1 P9 : \supset : n \in \mathbb{N} . \supset . Hp \supset Ts .$	
4.	$a \in K \mathbb{N} . a - = \wedge : \supset . Wa \in \mathbb{N} .$	Dacă a este o clasă nevidă de numere naturale, atunci a are un minim Wa, iar



			acest minim este un număr natural. $a \in \mathbb{K} \mathbb{N} . a \neq \emptyset : \rightarrow \exists a \in \mathbb{N}$ Aceasta reflectă proprietatea de „bună ordonare” a numerelor naturale: orice clasă nevidă de numere naturale are un element minim.
--	--	--	---

5.	$a \in \mathbb{K} \mathbb{N} . \exists : \exists a = M[x \in a](\exists x < x = \wedge)$.		Minimul W_a al clasei a este maximul mulțimii numerelor naturale x care sunt mai mici sau egale cu toate elementele din a. $a \in \mathbb{K} \mathbb{N} . W_a = M_a \{ x \in \mathbb{N} \forall y \in a, y \geq x \}$ Spre exemplu, dacă $a = \{2, 3, 4\}$, mulțimea numerelor x cu $x \leq y$ pentru orice $y \in a$ este $\{1, 2\}$, iar maximul acestei mulțimi este 2, deci $W_a = 2$.
----	---	--	--

„§4. De multiplicatie.

Definities.”

Despre înmulțire.

Definiții.

Notăția originală		Interpretare contemporană
1.	$a \in \mathbb{N} . \exists . a \times 1 = a$.	Înmulțirea cu 1: $\forall a \in \mathbb{N} : a \times 1 = a$
2.	$a, b \in \mathbb{N} . \exists . a \times (b + 1) = a \times b + a$.	Înmulțirea recursivă: $\forall a, b \in \mathbb{N} : a \times (b + 1) = a \times b + a$
$ab = a \times b; ab + c = (ab) + c; abc = (ab)c$.		

„Theoremata.”

Teoreme.

Notăția originală		Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
3.	$a, b \in \mathbb{N} . \exists . ab \in \mathbb{N}$.	Închiderea înmulțirii:



			$\forall a, b \in \mathbb{N} : a \times b \in \mathbb{N}$ Produsul a două numere naturale este tot număr natural. Precum, spre exemplu: $3 \times 2 = 3 \times (1 + 1) = 3 \times 1 + 3 = 3 + 3 = 6 \in \mathbb{N}$
Dem.	$a, b \in \mathbb{N} . P1 : \supset : a \times 1 \in \mathbb{N} : \supset . 1 \in [b \in] Ts.$		Prin inducție asupra lui b:
	$a, b \in \mathbb{N} . b \in [b \in] Ts : \supset : a \times b \in \mathbb{N} . \S 1 (2)$ $P19 : \supset : ab + a \in \mathbb{N} .$ $P1 : \supset : a(b + 1) \in \mathbb{N} : \supset : b + 1 \in [b \in] Ts.$		S-ar putea admite, că: $b = 1$ Din prima definiție: $a \times 1 = a \in \mathbb{N}$
	(1)(2). $\supset . Theor.$		Pasul inductiv: Presupunem $a \times b \in \mathbb{N}$ Din a doua definiție: $a \times (b + 1) = a \times b + a$ Dar, cum $a \times b \in \mathbb{N}$ și $a \in \mathbb{N}$, din închiderea adunării: $a \times b + a \in \mathbb{N}$
4.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \supset . (a + b)c = ac + bc .$		Distributivitatea la dreapta: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a + b) \times c = a \times c + b \times c$ Înmulțirea se distribuie față de adunare. Precum, spre exemplu: $(2 + 3) \times 4 = 5 \times 4 = 20$ Și: $2 \times 4 + 3 \times 4 = 8 + 12 = 20$

„Nota. Haec est prop. 5^a Euclidis elem. libri VII”

Notă. Aceasta este propoziția 5^a din „Elementele lui Euclid”, Cartea a VII-a.

Dem.	$a, b \in \mathbb{N} . P1 : \supset : 1 \in [c \in] Ts.$	(1)	Așa încât, s-ar putea accepta că, prin inducție asupra lui c:
	$a, b, c \in \mathbb{N} . c \in [c \in] Ts$	(2)	
	$: \supset : (a + b)c = ac + bc . \S 1 P22$ $: \supset : (a + b)c + a + b = ac + bc + a + b .$ $P2$ $: \supset : (a + b)(c + 1) = a(c + 1) + b(c +$		Dacă, $c = 1$: $(a + b) \times 1 = a + b$ (din definiția 1)



	1) : $\mathcal{D}$: $c + 1 \in [c \in] \text{Ts.}$		$a \times 1 + b \times 1 = a + b$ (tot, din definiția 1)
	(1)(2). $\mathcal{D}$. Theor.		Pasul inductiv: Se presupune că: $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ $(a + b) \times (c + 1) = (a + b) \times c + (a + b)$ (din definiția 2) $= a \times c + b \times c + a + b$ (din ipoteza inductivă) $= a \times c + a + b \times c + b$ (comutativitatea adunării) $= a \times (c + 1) + b \times (c + 1)$ (din definiția 2)
5.	$a \in \mathbb{N} . \mathcal{D} . 1 \times a = a .$		Neutralitatea lui 1 la stânga: $\forall a \in \mathbb{N} : 1 \times a = a$ Precum, spre exemplu: $1 \times 5 = 5$
Dem.	$1 \in [a \in] \text{Ts.}$	(1)	Pur și simplu, prin inducție asupra lui a:
	$a \in [a \in] \text{Ts} . \mathcal{D} . 1 \times a = a . \mathcal{D} . 1 \times a + 1$ $=$ $a + 1 . \times . 1 \times (a + 1) = a + 1 . \mathcal{D} . a + 1$ $\in [a \in]$	(2)	Dacă, $a = 1$ atunci $1 \times 1 = 1$ (din prima definiție)
	Ts.		Pasul inductiv:
	(1)(2). $\mathcal{D}$. Theor.		Se presupune că: $1 \times a = a$ $1 \times (a + 1) = 1 \times a + 1$ (din a doua definiție) $= a + 1$ (din ipoteza inductivă)
6.	$a, b \in \mathbb{N} . \mathcal{D} . ba + a = (b + 1)a.$		Formula pentru înmulțirea cu succesul: $\forall a, b \in \mathbb{N} : b \times a + a = (b + 1) \times a$ De fapt, aceasta este „forma inversă” a celei de-a doua definiții. Și deși domnia sa nu demonstrează așa ceva, s-ar putea totuși admite că, toate acestea ar rezulta, direct din comutativitate (din teorema 7) și din a doua de-



			finiție. Precum, spre exemplu: $3 \times 4 + 4 = 12 + 4 = 16 = 4 \times 4 = (3 + 1) \times 4$
7.	$a, b \in \mathbb{N} . \supset . ab = ba.$	(Eucl. VII, 16)	Comutativitatea: $\forall a, b \in \mathbb{N} : a \times b = b \times a$ Precum, spre exemplu: $3 \times 4 = 12 = 4 \times 3$
Dem.	$a \in \mathbb{N} . P5 . P1$ $: \supset . a \times 1 = a = 1 \times a : \supset : 1 \in [b \in] \text{ Ts.}$	(1)	Prin inducție asupra lui b: Dacă $b = 1$, atunci: $a \times 1 = a = 1 \times a$ (din prima definiție și din a 5-a teoremă) Pasul inductiv: Se presupune că: $a \times b = b \times a$ $a \times (b + 1) = a \times b + a \text{ (din a doua definiție)}$ $= b \times a + a \text{ (din ipoteza inductivă)}$ $= (b + 1) \times a \text{ (din a 6-a teoremă)}$ Deci: $a \times b = b \times a$
	$a, b \in \mathbb{N} . b \in [b \in] \text{ Ts}$ $: \supset : ab = ba : \supset : ab + a = ba + a . P1$.P6: $\supset : a(b + 1) = (b + 1)a : \supset : b + 1 \in [b \in]$	(2)	
	Ts.		
	(1)(2). $\supset . \text{Theor.}$		
8.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \supset . a(b + c) = ab + ac .$		Distributivitatea generalizată: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ Precum, spre exemplu: $3 \times (2 + 4) = 3 \times 6 = 18$ Ori: $3 \times 2 + 3 \times 4 = 6 + 12 = 18$
Dem.	$P4 . P7 : \supset . \text{Theor.}$		Din teorema 4 și acceptând comutativitatea (teorema 7): $a \times (b + c) = (b + c) \times a = b \times a + c \times a = a \times b + a \times c$ Așa încât: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c .$
9.	$a, b, c \in \mathbb{N} . a = b : \supset : ac = bc .$		Simplificarea înmulțirii:



			$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a = b \rightarrow a \times c = b \times c$ Precum, spre exemplu: Dacă $a = 3$ și $b = 3$, atunci $3 \times 5 = 3 \times 5$
Dem.	$a, b \in \mathbb{N} . a = b :: \mathcal{D} :: 1 \in [c \in] \text{Ts} \therefore c \in [c \in] \text{Ts}$		Asa încât, dacă $a = b$.
	$. \mathcal{D} : ac = bc . a = b : \mathcal{D} : ac + a = bc + b : \mathcal{D} :$		Prin inducție asupra lui c :
	$a(c + 1) = b(c + 1) : \mathcal{D} : c + 1 \in [c \in] \text{Ts}$		Cazul de bază: $c=1$.
	$:: \mathcal{D} : c \in \mathbb{N} . \mathcal{D} . \text{Ts}.$		$a \times 1 = a = b = b \times 1$ deci $a \times 1 = b \times 1$. Pas inductiv: Dacă pentru un $c \in \mathbb{N}$: $a \times c = b \times c$ Atunci: $a \times (c + 1) = b \times (c + 1)$ Prin definiția înmulțirii și prin recurență: $a \times (c + 1) = a \times c + a$ $b \times (c + 1) = b \times c + b$ Prin ipoteza inductivă: $a \times c = b \times c$. Dar, $a = b$. Deci: $a \times (c + 1) = a \times c + a = b \times c + b = b \times (c + 1)$. Deci: $a \times c = b \times c$ pentru orice $c \in \mathbb{N}$.
10.	$a, b, c \in \mathbb{N} : a < b : \mathcal{D} . (b - a)c = bc - ac.$	(Eucl. VII, 7)	Distributivitatea diferenței: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a < b \rightarrow (b - a) \times c = b \times c - a \times c$ Precum, spre exemplu, pentru:



		$5 < 8$ și $c = 3$: $(8 - 5) \times 3 = 3 \times 3 = 9$ Și: $8 \times 3 - 5 \times 3 = 24 - 15 = 9$
Dem.	Hyp . $\supset$: $b - a \in \mathbb{N} . (b - a) + a = b : \supset$: $(b - a)c + ac = bc : \supset$: $(b - a)c = bc - ac$.	Din $a < b$: $b - a \in \mathbb{N}$ și $(b - a) + a = b$ Înmulțind cu c : $((b - a) + a) \times c = b \times c$ Prin distributivitate: $(b - a) \times c + a \times c = b \times c$ Prin definiția diferenței: $(b - a) \times c = b \times c - a \times c$
11.	$a, b, c \in \mathbb{N} . a < b : \supset$: $ac < bc$.	Monotonia înmulțirii: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a < b \rightarrow a \times c < b \times c$ Precum, spre exemplu: $3 < 5 \rightarrow 3 \times 4 = 12 < 20 = 5 \times 4$
Dem.	Hyp . $\supset$: $b - a \in \mathbb{N} . P3 : \supset$: $(b - a)c \in \mathbb{N}$. P10 : $\supset$: $bc - ac \in \mathbb{N} : \supset$ Thesis.	Din teorema 10: $(b - a) \times c = b \times c - a \times c$ Dar, cum: $a < b \rightarrow b - a \in \mathbb{N} \rightarrow (b - a) \times c \in \mathbb{N}$ Deci, $b \times c - a \times c \in \mathbb{N} \rightarrow a \times c < b \times c$
12.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \supset \therefore a < b . = . ac < bc : a = b . = . ac = bc : a > b . = . ac > bc$.	Caracterizarea ordinii prin înmulțire: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a < b \leftrightarrow a \times c < b \times c) \wedge (a = b \leftrightarrow a \times c = b \times c) \wedge (a > b \leftrightarrow a \times c > b \times c)$ Așa încât, înmulțirea păstrează ordinea Deci, este monotonă.
13.	$a, b, a', b' \in \mathbb{N} . a < a' . b < b' : \supset$: $ab < a'b'$.	Monotonia înmulțirii: Pentru $a, b, a', b' \in \mathbb{N}$: dacă $a < a'$ și $b < b'$, atunci $ab < a'b'$. Precum spre exemplu: Dacă $3 < 5$ și $4 < 7$, atunci $3 \times 4 = 12 < 35 = 5 \times 7$



		$5 \times 7 = 35$. Și deși domnia sa nu demonstrează așa ceva, totuși s-ar putea accepta că: Din $a < a'$ rezultă $a' = a + k$ pentru un $k \geq 1$ Din $b < b'$ rezultă $b' = b + m$ pentru un $m \geq 1$ Atunci: $a'b' = (a + k)(b + m) = ab + am + kb + km$ Dar, cum: $k, m \geq 1$, avem $am + kb + km > 0$ Prin urmare, $a'b' > ab$, deci $ab < a'b'$.
14.	$a, b \in \mathbb{N} : \mathcal{D} . ab . > \cup = . a.$	Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$: $a \times b \geq a$ Dacă a și b sunt numere naturale, atunci $a \times b$ este mai mare sau egal cu a. Așa încât, așa ceva se bazează pe proprietățile de bază ale înmulțirii în $\mathbb{N}$. Dacă $b = 1$: $a \times b = a \times 1 = a$. În acest caz, $a \times b$ este egal cu a. Condiția „mai mare sau egal” este îndeplinită. Dacă $b > 1$: b este cel puțin 2, deci $b = 1 + k$, unde $k \in \mathbb{N}$ și $k \geq 1$. $a \times b = a \times (1 + k) = a \times 1 + a \times k = a + ak$. Și întrucât a este un număr natural și $k \geq 1$, produsul $a \times k$ va fi un număr natural pozitiv. Prin urmare, $ab = a + (\text{un număr} \geq 0)$. Așa încât $a \times b$ este mai mare sau egal cu a.



15.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \supset . a(bc) = abc .$		Asociativitatea înmulțirii: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ Precum, spre exemplu: $2 \times (3 \times 4) = 2 \times 12 = 24 = 6 \times 4 = (2 \times 3) \times 4$
Dem.	$a, b \in \mathbb{N} . P1 : \supset : 1 \in [c \in] Ts.$	(1)	Prin inducție:
	$a, b, c \in \mathbb{N} . c \in [c \in] Ts$ $: \supset : a(bc) = abc : \supset : a(bc) + ab = abc + ab :$ $\supset : a(bc + b) = ab(c + 1) : \supset : a(b(c + 1)) =$ $ab(c + 1) : \supset : c + 1 [c \in] Ts.$	(2)	Dacă $c = 1$, atunci: $a \times (b \times 1) = a \times b = (a \times b) \times 1$ Pasul inductiv:
	(1)(2). $\supset . Theor.$		Se presupune că: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ $a \times (b \times (c + 1)) = a \times (b \times c + b)$ (din definiția 2) $= a \times (b \times c) + a \times b$ (din distributivitate) $= (a \times b) \times c + a \times b$ (din ipoteza inductivă) $= (a \times b) \times (c + 1)$ tot, din definiția 2.

„§5. De potestatibus.

Definitiones.”

§5. Despre ridicarea la putere.

Definiții.

Notăția originală	Interpretare contemporană
1. $a \in \mathbb{N} . \supset . a^1 = a.$	Pentru orice $a \in \mathbb{N}$: $a^1 = a$
2. $a, b \in \mathbb{N} . \supset . a^{b+1} = a^b a.$	Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$: $a^{(b+1)} = a^b \times a$

„Theoremata.”

Teoreme

Notăția originală	Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
3. $a, b \in \mathbb{N} . \supset . a^b \in \mathbb{N}.$	Închiderea numerelor naturale față de ridicarea la putere:



			Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$, $a^b \in \mathbb{N}$.
Dem.	$a \in \mathbb{N} . P1 : \bigcirc . 1 \in [b \in] Ts.$	(1)	Demonstrația s-ar putea face prin inducție asupra lui b :
	$a, b \in \mathbb{N} . b \in [b \in] Ts$ $: \bigcirc : a^b \in \mathbb{N} . \S 4P3: \bigcirc : a^b a \in \mathbb{N}.$ $P1: \bigcirc : a^{b+1} \in \mathbb{N} : \bigcirc : b + 1 \in [b \in] Ts.$	(2)	Dacă: $b = 1$ $a^1 = a \in \mathbb{N}$ (prin definiție)
	(1)(2). $\bigcirc . .$ Theor.		Pasul inductiv: Presupunem $a^k \in \mathbb{N}$ $a^{(k+1)} = a^k \times a$ Dar, cum $a^k \in \mathbb{N}$ și $a \in \mathbb{N}$, prin închiderea înmulțirii avem $a^{(k+1)} \in \mathbb{N}$
4.	$a \in \mathbb{N} . \bigcirc . 1^a = 1.$		$1^a = 1$, prin definiție, întrucât 1 este chiar primul număr natural.
5.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \bigcirc . a^{b+c} = a^b a^c .$		Legea exponenților pentru adunare: Pentru $a, b, c \in \mathbb{N}$: $a^{(b+c)} = a^b \times a^c$ Precum, spre exemplu: $2^{(3+4)} = 2^7 = 128 = 2^3 \times 2^4 = 8 \times 16$ Și deși domnia sa nu demonstrează așa ceva, s-ar putea totuși demonstra prin inducție asupra lui c : Dacă: $c = 1$ $a^{(b+1)} = a^b \times a^1 = a^b \times a$ (prin definiții) Pasul inductiv: Și s-ar presupune că, de fapt: $a^{(b+k)} = a^b \times a^k$ Și atunci: $a^{(b+(k+1))} = a^{((b+k)+1)} = a^{(b+k)} \times a = (a^b \times a^k) \times a = a^b \times (a^k \times a) = a^b \times a^{(k+1)}$ Deci: $a^{(b+c)} = a^b \times a^c$, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}$



6.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \mathcal{D} . (ab)^c = a^c b^c .$	Distribuția puterilor asupra produsului: Pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}$: $(ab)^c = a^c \times b^c$ Precum, spre exemplu: $(2 \times 3)^4 = 6^4 = 1296 = 2^4 \times 3^4 = 16 \times 81$ Și deși domnia sa nu demonstrează așa ceva, s-ar putea demonstra, prin inducție asupra lui c: Dacă: $c = 1$ $(ab)^1 = ab = a^1 \times b^1$ (prin definiția puterilor) Pasul inductiv: Presupunem că $(ab)^k = a^k \times b^k$ $(ab)^{(k+1)} = (ab)^k \times (ab) = (a^k \times b^k) \times (ab) = a^k \times a \times b^k \times b = a^{(k+1)} \times b^{(k+1)}$
7.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \mathcal{D} . (a^b)^c = a^{bc} .$	Puterea unei puteri: Pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}$: $(a^b)^c = a^{(bc)}$ Precum, spre exemplu: $(2^3)^2 = 8^2 = 64 = 2^{(3 \times 2)} = 2^6$ Și deși domnia sa nu demonstrează așa ceva s-ar putea demonstra, prin inducție asupra lui c: Dacă: $c = 1$ $(a^b)^1 = a^b = a^{(b \times 1)}$ (prin proprietatea elementului neutru) Pasul inductiv: Presupunem că $(a^b)^k = a^{(bk)}$ $(a^b)^{(k+1)} = (a^b)^k \times a^b = a^{(bk)} \times a^b = a^{(bk+b)} = a^{(b(k+1))}$
8.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \mathcal{D} . \therefore a < b . = . a^c < b^c : a = b . = . a^c = b^c : a > b . = . a^c > b^c .$	„Monotonicitatea exponențierii” Pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}$, avem:



		$a < b \leftrightarrow a^c < b^c$ $a = b \leftrightarrow a^c = b^c$ $a > b \leftrightarrow a^c > b^c$ $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (a < b \leftrightarrow a^c < b^c) \wedge (a = b \leftrightarrow a^c = b^c) \wedge (a > b \leftrightarrow a^c > b^c)$ Așa încât, prin așa ceva se afirmă că, exponențierea păstrează ordinea pentru numerele naturale. De fapt, dacă se ridică două numere naturale la aceeași putere, relația de ordine dintre ele rămâne aceeași. Și deși domnia sa nu demonstrează așa ceva, s-ar putea – totuși – presupune, că: În cazul în care: $a < b \rightarrow a^c < b^c$ Așa ceva, se poate demonstra prin inducție după c: Deci, dacă: $c = 1$ $a^1 = a < b = b^1$ Pasul inductiv: Presupunem $a^k < b^k$, demonstrăm $a^{(k+1)} < b^{(k+1)}$ $a^{(k+1)} = a^k \times a < b^k \times a \text{ (din ipoteza inductivă și } a > 0)$ $b^k \times a < b^k \times b = b^{(k+1)} \text{ (pentru că } a < b)$ Prin tranzitivitate: $a^{(k+1)} < b^{(k+1)}$ Dar, dacă: $a = b \rightarrow a^c = b^c$ Desigur, dacă $a = b$, atunci $a^c = b^c$ pentru orice c. Iar, dacă: $a > b \rightarrow a^c > b^c$ Se poate demonstra exact ca și în primul caz, prin inducție. Doar că, așa ceva nu e valabil pentru
--	--	---



		toate soiurile de numere. Spre exemplu, pentru acelea negative: $(-2)^2 = 4 > 1 = (-1)^2$, deși $-2 < -1$. În cazul numerelor naturale „funcționează” pentru că toate sunt pozitive și exponențierea cu exponenți naturali este strict crescătoare.
9.	$a, b, c \in \mathbb{N} . a > 1 . \supset \therefore b < c . = . a^b < a^c$: $b = c . = . a^b = a^c : b > c . = . a^b > a^c$.	„Monotonicitatea strictă a exponențierii”: Pentru $a \in \mathbb{N}$ cu $a > 1$ și $b, c \in \mathbb{N}$: $b < c \leftrightarrow a^b < a^c$ $b = c \leftrightarrow a^b = a^c$ $b > c \leftrightarrow a^b > a^c$ Și deși domnia sa nu demonstrează nici așa ceva, s-ar putea – totuși – re-presupune, că: Partea 1-a: $b < c \rightarrow a^b < a^c$ Din $b < c$ s-ar presupune că există $k \in \mathbb{N}$ astfel că $c = b + k$. Atunci: $a^c = a^{(b+k)} = a^b \times a^k$ Iar, cum, $a > 1$ și $k \geq 1$, avem $a^k \geq a^1 = a > 1$. Prin urmare: $a^c = a^b \times a^k > a^b \times 1 = a^b$ Deci $a^b < a^c$. Partea 2-a: $a^b < a^c \rightarrow b < c$ Se demonstrează prin contradicție. Și dacă se presupune că $b \geq c$. Dacă $b = c$, atunci $a^b = a^c$ (contradicție cu $a^b < a^c$) Dacă $b > c$, avem $a^b > a^c$ (contradicție cu $a^b < a^c$) Prin urmare $b < c$. Partea 3-a: Cazurile pentru egalitate și



			„>” În același manieră, pentru $b = c$, $a^b = a^c$, iar pentru $b > c$ se demonstrează în aceeași manieră ca în partea 1-a că $a^b > a^c$. Așa încât, se stabilește că exponențiala cu baza > 1 păstrează și reflectă ordinea. Iar, așa ceva este folosit – cel puțin - pentru: Rezolvarea inegalităților exponențiale Definirea logaritmilor ca „funcții exponențiale inverse”. Doar că, această teoremă este validă doar pentru $a > 1$. Pentru $a = 1$, avem $1^n = 1$ pentru orice n, deci funcția exponențială nu este strict monotonă. Dar, domnul Peano specifică explicit această condiție.
--	--	--	--

„§6. De divizione.

Explicationes.”

Signum	/	legatur	divisus per.
>>	D	>>	dividit, sive est divisor
>>	Đ	>>	est multiplex.
>>	Np	>>	numerus primus.
>>	π	>>	est primus cum.

§6. Despre împărțire.

Explicații.

Simbol	/	leagă	Împărțit la
>>	D	>>	Împarte sau este divisor
>>	Đ	>>	Este multiplu
>>	Np	>>	Număr prim.
>>	π	>>	„Este primul care ...”



„Definitiones.”

Definiții.

Notăția originală		Interpretare contemporană
1.	$a, b \in \mathbb{N} . \exists: b/a = \mathbb{N} [x \in](xa = b).$	b/a este mulțimea $\{x \in \mathbb{N} xa = b\}$ b/a reprezintă „câtul” împărțirii lui b la a (când există).
2.	$a, b \in \mathbb{N} . \exists: a \mathcal{D} b . = . b/a - = \wedge$	a divide pe b (notat $a b$) dacă și numai dacă există $q \in \mathbb{N}$ astfel încât $b = aq$.
3.	$a, b \in \mathbb{N} . \exists: b \mathcal{D} a . = . a \mathcal{D} b.$	Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$: $b a \leftrightarrow a b$ Astfel definindu-se echivalența relației de divizibilitate în ambele sensuri.
4.	$\mathbb{P} = \mathbb{N} [x \in](\exists \mathcal{D} x . \exists > 1 . \exists < x := \wedge).$	$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} : x > 1 \wedge \neg \exists d(1 < d < x \wedge d x)\}$ Astfel definindu-se mulțimea numerelor prime ca acele numere naturale mai mari ca 1 care nu au divizori proprii.
5.	$a, b \in \mathbb{N} . \exists: a \pi b . \therefore = . \therefore \exists \mathcal{D} a . \exists \mathcal{D} b . \exists > 1 := \wedge .$	Pentru $a, b \in \mathbb{N}$: $\text{cmmdc}(a, b) = \max\{d \in \mathbb{N} : d a \wedge d b \wedge d > 1\}$ Astfel definindu-se cel mai mare divizor comun.
6.	$a, b \in \mathbb{N} . \exists: \mathcal{D}(a, b) := : \exists \mathcal{D} a . \cap . \exists \mathcal{D} b.$	Pentru $a, b \in \mathbb{N}$: $d (a, b) \leftrightarrow d a \wedge d b$ Un număr împarte cmmdc-ul dacă și numai dacă împarte ambele numere.
7.	$a, b \in \mathbb{N} . \exists: \exists \mathcal{D}(a, b) := : \exists \mathcal{D} a . \cap . \exists \mathcal{D} b.$	Cel mai mare divizor comun: Pentru $a, b \in \mathbb{N}$, $\text{cmmdc}(a, b)$ este definit ca fiind numărul care divide atât pe a , cât și pe b și este cel mai mare, cu această proprietate: $\forall a, b \in \mathbb{N}: \text{cmmdc}(a, b) = \max\{d \in \mathbb{N} : d a \wedge d b\}$
	$ab/c = (ab)/c; a/b/c = (a/b)/c; a/b \times c = (a/b)c$	$ab/c = (ab)/c$ $a/b/c = (a/b)/c$ $a/b \times c = (a/b)c$

“Theoremata.

Nota. Haec theoremata ut in subtractione demonstrantur.”

Teoreme

Aceste teoreme sunt demonstrate în mod similar cu cele din scădere.



Notăția originală		Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
8.	$a, b, a', b' \in \mathbb{N} . a = a' . b = b' : \mathcal{D} . a/b = a'/b' .$	$\forall a, b, a', b' \in \mathbb{N}: a/b = a'/b' .$
9.	$a, b, a', b' \in \mathbb{N} . a = a' . b = b' : \mathcal{D}: a \mathcal{D} b . = . a' \mathcal{D} b' .$	Egalitatea fracțiilor este „bine definită”: $\forall a, b, a', b' \in \mathbb{N}: (a = a' \wedge b = b') \rightarrow a/b = a'/b'$
10.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \mathcal{D}: a\mathcal{D} = b . = . \mathcal{D} = b/a .$	Definirea împărțirii printr-o „ecuație de multiplicare”. $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: ac = b \leftrightarrow c = b/a$
11.	$a, b \in \mathbb{N} . \mathcal{D}: a \mathcal{D} b . = . b/a \in \mathbb{N} .$	Un număr împarte altul dacă și numai dacă câtul este natural. $\forall a, b \in \mathbb{N}: a b \leftrightarrow b/a \in \mathbb{N}$
12.	$a \in \mathbb{N} . \mathcal{D} . a/1 = a .$	Împărțirea la „1” lasă numărul neschimbat. $\forall a \in \mathbb{N}: a/1 = a$
13.	$a \in \mathbb{N} . \mathcal{D} . a/a = 1 .$	Orice număr împărțit la el însuși dă unu. $\forall a \in \mathbb{N}: a/a = 1$
14.	$a \in \mathbb{N} . \mathcal{D} . 1 \mathcal{D} a .$	Unu împarte orice număr natural. $\forall a \in \mathbb{N}: 1 a$
15.	$a \in \mathbb{N} . \mathcal{D} . a \mathcal{D} a .$	Reflexivitatea divizibilității: $\forall a \in \mathbb{N}: a a$ Orice număr se împarte pe sine ().
16.	$a, b \in \mathbb{N} . ab/b = a .$	Legea simplificării în împărțire: $\forall a, b \in \mathbb{N}: (ab)/b = a$



17.	$a, b \in \mathbb{N} . a \mathcal{D} b : \mathcal{D} . a(b/a) = b.$		Dacă a împarte b, atunci a ori „câtul $dă$ b”. $\forall a, b \in \mathbb{N}: a b \rightarrow a \times (b/a) = b$
18.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \mathcal{D} \mathcal{D} b : \mathcal{D} . a(b/c) = ab/c.$		Proprietatea distributivă a multiplicării față de împărțire: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: c b \rightarrow a \times (b/c) = (ab)/c$
19.	$a, b, c \in \mathbb{N} . a \mathcal{D} bc : \mathcal{D}: a/(b\mathcal{D}) = a/b/c.$		Împărțirea la un produs se poate face succesiv: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: a bc \rightarrow a/(bc) = (a/b)/c$
20.	$a, b, c \in \mathbb{N} . a \mathcal{D} b . b \mathcal{D} c : \mathcal{D} . a/(b/c) = a/b \times c.$		Împărțirea la o fracție echivalează cu multiplicarea la inversă: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (a b \wedge b c) \rightarrow a/(b/c) = (a/b) \times c$
21.	$a, m, n \in \mathbb{N} . m > n : \mathcal{D} . a^m/a^n = a^{m-n}.$		Regula împărțirii puterilor cu aceeași bază: $\forall a, m, n \in \mathbb{N}: m > n \rightarrow a^m/a^n = a^{(m-n)}$
22.	$a, b \in \mathbb{N} . \mathcal{D} . a \mathcal{D} ab.$		Orice număr împarte produsul său cu alt număr: $\forall a, b \in \mathbb{N}: a ab$
23.	$a, b, c \in \mathbb{N} . a \mathcal{D} b . b \mathcal{D} c : \mathcal{D} . a \mathcal{D} c.$		Divizibilitatea este tranzitivă: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (a b \wedge b c) \rightarrow a c$ Doar că, domnia sa nu demonstrează așa ceva, deși s-ar putea accepta, că: Din $a b$, există $k_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $b = a \times k_1$ Din $b c$, există $k_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $c = b \times k_2$ Substituind: $c = (a \times k_1) \times k_2 = a \times (k_1 \times k_2)$ Cum $k_1 \times k_2 \in \mathbb{N}$, rezultă $a c$



24.	$a, b, c \in \mathbb{N} . a \mathcal{D} b \mathcal{D} c : \mathcal{D} . c/a \mathcal{D} c/b.$		Dacă există o secvență de divizibilități, se păstrează ordinea în câaturi: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (a b c) \rightarrow (c/a) (c/b)$
-----	---	--	---

25.	$a, b, c \in \mathbb{N} . c \mathcal{D} a . c \mathcal{D} b : \mathcal{D} . (a + b)/c = a/c + b/c .$		Distributivitatea împărțirii față de adunare: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (c a \wedge c b) \rightarrow (a + b)/c = a/c + b/c$
-----	--	--	---

26.	$a, b, c \in \mathbb{N} . \mathcal{D} \mathcal{D} a . \mathcal{D} \mathcal{D} b . a > b : \mathcal{D} : (a - b)/c = a/c - b/c.$		Distributivitatea împărțirii față de scădere: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (c a \wedge c b \wedge a > b) \rightarrow (a - b)/c = a/c - b/c$
-----	---	--	--

Proprietăți de divizibilitate pentru combinații liniare:

27.	$a, b, c \in \mathbb{N} . c \mathcal{D} a . c \mathcal{D} b : \mathcal{D} . c \mathcal{D} a + b.$		$c a \wedge c b \rightarrow c (a + b)$
-----	---	--	--

28.	$a, b, c \in \mathbb{N} . c \mathcal{D} a . c \mathcal{D} b . a > b : \mathcal{D} . c \mathcal{D} a - b.$		$c a \wedge c b \wedge a > b \rightarrow c (a - b)$
-----	---	--	---

29.	$a, b, c, m, n \in \mathbb{N} . c \mathcal{D} a . c \mathcal{D} b : \mathcal{D} . c \mathcal{D} ma + nb.$		$c a \wedge c b \rightarrow c (ma + nb)$
-----	---	--	--

30.	$a, b, c, m, n \in \mathbb{N} . c \mathcal{D} a . c \mathcal{D} b . ma > nb : \mathcal{D} . c \mathcal{D} ma - nb.$		$c a \wedge c b \wedge ma > nb \rightarrow c (ma - nb)$
-----	---	--	---

31.	$a, b \in \mathbb{N} . a \mathcal{D} b : \mathcal{D} : a . < \cup = . b.$		Proprietatea fundamentală a divizibilității: Pentru $a, b \in \mathbb{N}$: dacă $a b$, atunci $a \leq b$. Precum, spre exemplu: $6 18$ și într-adevăr $6 \leq 18$.
Dem.	Hyp . P11 . P17 . §4 P14 : $\mathcal{D} : b/a \in \mathbb{N} . a(b/a) = b . a < \cup = a(b/a) : \mathcal{D} .$ Thesis.		Dacă $a b$, atunci există un $q \in \mathbb{N}$ astfel încât $b = aq$ Cum $q \geq 1$, avem $b = aq \geq a \times 1 = a$ Prin urmare, $a \leq b$



32.	$a, b \in \mathbb{N} . a \mid b . b \mid a : \mathcal{D} . a = b.$	Dacă două numere se împart reciproc, sunt egale: $\forall a, b \in \mathbb{N}: (a b \wedge b a) \rightarrow a = b$ Și întrucât domnia sa nu demonstrează așa ceva, s-ar putea totuși accepta, că: Din $a b$, există $k_1 \in \mathbb{N}$ cu $b = ak_1$ Din $b a$, există $k_2 \in \mathbb{N}$ cu $a = bk_2$ Substituind: $a = (ak_1)k_2 = a(k_1k_2)$ Dacă $a \neq 0$, atunci $k_1k_2 = 1$ În $\mathbb{N}$, $k_1k_2 = 1 \leftrightarrow k_1 = k_2 = 1$ Prin urmare: $b = a$
33.	$a \in \mathbb{N} . \mathcal{D} . \exists \mathcal{D} a = a.$	Cel mai mare divizor al unui număr este numărul însuși: $\forall a \in \mathbb{N}: \max\{d \in \mathbb{N} : d a\} = a$
34.	$a, b \in \mathbb{N} . a > b : \mathcal{D} . \mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, a - b).$	Pentru $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a > b$: $\text{cmmdc}(a, b) = \text{cmmdc}(b, a-b)$ Aceasta fiind – de fapt - proprietatea fundamentală a celui mai mare divizor comun. Precum, spre exemplu: $a = 15, b = 9$ Pasul 1: Calculăm $\text{cmmdc}(15, 9)$ Divizorii lui 15: 1, 3, 5, 15 Divizorii lui 9: 1, 3, 9 Divizorii comuni: 1, 3 $\text{cmmdc}(15, 9) = 3$ Pasul 2: Se aplică formula $\text{cmmdc}(a, b) = \text{cmmdc}(b, a-b)$ $a - b = 15 - 9 = 6$ Deci ar trebui ca acum, să se calculeze



			cmmdc(9, 6) Pasul 3: Calculăm cmmdc(9, 6) Divizorii lui 9: 1, 3, 9 Divizorii lui 6: 1, 2, 3, 6 Divizorii comuni: 1, 3 cmmdc(9, 6) = 3 Deci: cmmdc(15, 9) = cmmdc(9, 6) = 3 Pentru că – pur și simplu - orice divizor comun al lui a și b este și divizor al lui (a-b). Și invers. Iar, tocmai această proprietate stă la baza „algoritmului lui Euclid pentru calculul cmmdc-ului prin scăderi repetate”. Deci, s-ar putea continua, acceptând că: cmmdc(9, 6) = cmmdc(6, 3) = cmmdc(3, 3) = 3.
Dem.	Hyp. P28	(1)	Demonstrația (bazată pe „algoritmul lui Euclid”): 1. Fie $d = \text{cmmdc}(a, b)$ 2. Atunci $d a$ și $d b$ 3. Din $d a$ și $d b$ rezultă $d (a-b)$ 4. Prin urmare, $d \text{cmmdc}(b, a-b)$ 5. Și în același mod, se demonstrează că $\text{cmmdc}(b, a-b) d$ 6. Prin urmare, $\text{cmmdc}(a, b) = \text{cmmdc}(b, a-b)$
	$\exists x \text{ } x \mid a \wedge x \mid b : \exists x \text{ } x \mid b \wedge x \mid (a - b)$		
	Hyp. P27 : $\exists x \text{ } x \mid b \wedge x \mid (a - b) : \exists x \text{ } x \mid b \wedge x \mid (b + (a - b)) : \exists x \text{ } x \mid b \wedge x \mid a$	(2)	
	(1)(2) $\exists$ Hyp.	(Th.)	
	$\exists x \text{ } x \mid a \wedge x \mid b := \exists x \text{ } x \mid b \wedge x \mid (a - b)$		
35.	$a, b \in \mathbb{N} : \exists M \text{ } M \mid (a, b) \in \mathbb{N}$		$\forall a, b \in \mathbb{N} : \text{cmmdc}(a, b) \in \mathbb{N}$
Dem.	$1 \mid a \wedge 1 \mid b : \exists d \text{ } d \mid (a, b) - = \wedge$	(1)	Demonstrația domnului Peano: (1) $1 \mid a \wedge 1 \mid b : \exists d \text{ } d \mid (a, b) - = \wedge$ Unu împarte ambele numere, deci există divizori comuni (2) $\exists d \text{ } d \mid (a, b). \exists > a := \wedge$ Există divizori comuni mai mari decât a (contradicție logică)
	$\exists d \text{ } d \mid (a, b). \exists > a := \wedge$	(2)	
	(1)(2). §3 P3 : $\exists$ Th.		



			(3) Din (1)(2). §3 P3 : $\supset$. Th. Din (1) și (2), prin principiul 3 din secțiunea 3, rezultă teorema Sau, într-o traducere contemporană: 1. $1 a$ și $1 b$, deci mulțimea divizorilor comuni este nevidă 2. Orice divizor comun este $\leq \min(a, b)$, deci mulțimea este mărginită superior 3. Prin principiul bunei ordonări, există un element maximal $\rightarrow \text{cmmdc}(a, b) \in \mathbb{N}$
36.	$a, b \in \mathbb{N} . \supset . \exists \mathcal{D} (a, b) = \exists \mathcal{D} M \exists \mathcal{D} (a, b).$	(Eucl. VII, 2)	Pentru $a, b \in \mathbb{N}$: $\text{cmmdc}(a, b)$ este unicul număr natural d care îndeplinește două condiții: a. d divide atât pe a, cât și pe b Și: b. orice alt divizor comun al lui a și b divide pe d. Așa încât, acesta este „algoritmul lui Euclid” pentru determinarea „cmmdc”.
Dem.	$k = \mathbb{N} [c \in] (\text{Hp. } a < c . b < c : \supset . \text{Ts.}).$	(1)	Iar, printr-o demonstrație simplificată, s-ar putea pleca de la premisa că pentru $a, b \in \mathbb{N}$, dacă $a = q \times b + r$ (cu $0 \leq r < b$), atunci $\text{cmmdc}(a, b) = \text{cmmdc}(b, r)$. Relația $a = q \times b + r$ provine din împărțirea lui a la b: q este câtul împărțirii, un număr întreg care arată de câte ori încap b în a. r este restul împărțirii, adică ce rămâne după ce scazi $q \times b$ din a. Restul r satisface condiția $0 \leq r < b$, Ceea ce înseamnă că este ne-negativ și mai mic decât b.
	$a \in \mathbb{N} . b \in \mathbb{N} . a < 1 . b < 1 := \wedge$	(2)	
	$(1)(2) . \supset . 1 \in K .$	(3)	
	$a, b \in \mathbb{N} . a < c + 1 . b < c + 1 : \supset \therefore a < c . b < c : \cup : a = c . b < c : \cup : a < c . b = c : \cup : a = c . b = c .$	(4)	
	$c \in k . a, b \in \mathbb{N} . a < c . b < c : \supset : \text{Ts.}$	(5)	
	$c \in k . a, b \in \mathbb{N} . a = c . b < c : \supset : c \in k . b < c / p a - b < c . \in \mathcal{D} (a, b) = \exists \mathcal{D} (b, a - b) : \supset : \exists \mathcal{D} (b, a - b) = \exists \mathcal{D} M \exists \mathcal{D} (b, a - b) : \supset : \exists \mathcal{D} (a, b) = \exists \mathcal{D} M \exists \mathcal{D} (a, b) : \supset : \text{Ts}$	(6)	
	$(a, b)[b, a](6) \supset . c \in k . a, b \in \mathbb{N} . a < c . b = c :$	(7)	
	$\supset : \text{Ts.}$		



	$c \in k, a, b \in \mathbb{N} . a = c . b = c : \mathcal{D} : \exists \mathcal{D} (8)$ $(a, b) =$ $\exists \mathcal{D} c = \exists \mathcal{D} M \exists \mathcal{D} c = \exists \mathcal{D} M \exists \mathcal{D} (a,$ $b) : \mathcal{D} :$		Și atunci: Pasul 1: Orice divizor comun al lui a și b divide pe r:
	Ts.		
	$(4)(5)(6)(7)(8). \mathcal{D} . c \in k . a, b \in$ $\mathbb{N} . a < c + 1 . b < c + 1 : \mathcal{D} : Ts.$	(9)	Iar, d un divizor comun al lui a și b, adică $a=d \times x$ și $b=d \times y$ pentru niște numere întregi x și y.
	$(9) \mathcal{D} . c \in k . \mathcal{D} . (\mathcal{D} + 1) \in k.$	(10)	
	$(1)(10). \mathcal{D} . \therefore c \in \mathbb{N} . Hp. a < c . b < c : (11)$ $\mathcal{D} : Ts.$	(11)	Din relația $a=q \times b+r$, rezultă $r=a-q \times b$.
	$(a + b)[\mathcal{D}](11). \mathcal{D} : Hp. \mathcal{D} . Ts.$	(Th.)	Substituind: $r=d \times x - q \times (d \times y) = d \times (x - q \times y).$ Deci, d divide pe r, întrucât $x - q \times y$ este un număr întreg. Așadar, orice divizor comun al lui a și b este și un divizor al lui r, deci este un divizor comun al lui b și r. Pasul 2: Orice divizor comun al lui b și r divide pe a: Fie d' un divizor comun al lui b și r, adică $b=d' \times z$ și $r=d' \times w$ pentru niște numere întregi z și w. Din relația $a=q \times b+r$, se substituie: $a=q \times (d' \times z) + d' \times w = d' \times (q \times z + w).$ Deci, d' divide pe a, deoarece $q \times z + w$ este un număr întreg. Așadar, orice divizor comun al lui b și r este și un divizor al lui a, deci este un divizor comun al lui a și b. Așa încât, din ceea ce rezultă în urma acestor pași s-ar putea accepta că: Mulțimea divizorilor comuni ai lui (a,b) este identică cu mulțimea divizorilor comuni ai lui (b,r). Prin urmare, cel mai mare divizor comun al lui (a,b) este același cu cel al lui (b,r), adică



		$\text{cmmdc}(a,b)=\text{cmmdc}(b,r).$ Iar, algoritmul lui Euclid folosește această proprietate în mod repetat. În fiecare pas: Se calculează r, restul împărțirii lui a la b, folosind $a=q \times b + r$. Se înlocuiește (a,b) cu (b,r) și se continuă procesul. Întrucât $r < b$, resturile scad în fiecare pas, iar fiind nenegative ($r \geq 0$), procesul se oprește când restul devine 0. Ultimul rest nenul este $\text{cmmdc}(a,b)$. Precum spre exemplu: Pentru $a=48, b=18$: Pasul 1: $48=2 \times 18 + 12$, deci $r=12$. Se verifică: $\text{cmmdc}(48,18)=\text{cmmdc}(18,12)$. Pasul 2: $18=1 \times 12 + 6$, deci $r=6$. Se verifică: $\text{cmmdc}(18,12)=\text{cmmdc}(12,6)$. Pasul 3: $12=2 \times 6 + 0$, deci restul e 0. Ultimul rest nenul este 6. Deci, $\text{cmmdc}(48,18)=6$.
37.	$a, b, m \in \mathbb{N} . \supset . M \in \mathbb{D} (am, bm) = m \times M \in \mathbb{D} (a, b).$	Proprietatea de omogenitate a celui mai mare divizor comun: $\forall a, b, m \in \mathbb{N}: \text{cmmdc}(am, bm) = m \times \text{cmmdc}(a, b)$

„§7. Theoremata varia.”

§7. Diverse teoreme.

Notăția originală	Notăția contemporană reformulată în
-------------------	-------------------------------------



			limbaj natural
1.	$a, b \in \mathbb{N} : a^2 + b^2 \not\equiv 7 : 7 : a \not\equiv 7 : b \not\equiv 7.$		Dacă 7 împarte suma pătratelor, atunci împarte fiecare termen: $\forall a, b \in \mathbb{N} : 7 (a^2 + b^2) \rightarrow (7 a \wedge 7 b)$
2.	$x \in \mathbb{N} : \exists : x(x + 1) \not\equiv 2.$		Produsul consecutiv este par: Pentru orice $x \in \mathbb{N} : 2 x(x+1)$ Precum, spre exemplu: $5 \times 6 = 30 = 2 \times 15$, deci $2 30$.
3.	$x \in \mathbb{N} : \exists : x(x + 1)(x + 2) \not\equiv 6.$		Produsul a trei numere consecutive: Pentru orice $x \in \mathbb{N} : 6 x(x+1)(x+2)$ Precum, spre exemplu: $4 \times 5 \times 6 = 120 = 6 \times 20$. Printre trei numere consecutive, unul este divizibil cu 3. Printre trei numere consecutive, cel puțin unul este par. Prin urmare, produsul este divizibil cu $2 \times 3 = 6$
4.	$x \in \mathbb{N} : \exists : x(x + 1)(2x + 1) \not\equiv 6.$		Pentru orice număr natural x, produsul $x(x + 1)(2x + 1)$ este divizibil cu 6. $\forall x \in \mathbb{N} : 6 x(x + 1)(2x + 1)$

Teoremele 5 și 6 - Numere consecutive prime între ele:

5.	$x \in \mathbb{N} : \exists : x : \pi : x + 1.$		Pentru orice număr natural x numerele x și $x + 1$ sunt coprime (adică, cel mai mare divizor comun al lor este 1). Deci, dacă x este un număr natural, atunci x și $x + 1$ nu au divizori comuni în afară de 1. $\forall x \in \mathbb{N} : \text{cmmdc}(x, x + 1) = 1$
----	---	--	---



6.	$x \in \mathbb{N} : \exists : 2x - 1 \cdot \pi \cdot 2x + 1.$		Pentru orice număr natural x , numerele $(2x - 1)$ și $(2x + 1)$ sunt coprime (cel mai mare divizor comun al lor este 1). $\forall x \in \mathbb{N} : \text{cmmdc}(2x - 1, 2x + 1) = 1$
7.	$x \in \mathbb{N} : \exists : (2x + 1)^2 - 1 \notin 8.$		Pătratul unui număr impar minus 1 este întotdeauna divizibil cu 8. $\forall x \in \mathbb{N} : 8 ((2x + 1)^2 - 1)$
8.	$a \in \mathbb{N} . a > 1 : \exists \therefore \mathbb{N} p . \exists > 1 . \exists \nmid a : -$ $= \wedge$	(Eucl. VII, 31)	Teorema Fundamentală a Aritmeticii - versiunea lui Euclid Orice număr natural > 1 are un divizor prim (Euclid VII, 31). $\forall a \in \mathbb{N}, a > 1 : \exists p \in \mathbb{P} : p a$
9.	$a, b \in \mathbb{N} \therefore b^2 > a \therefore \exists \nmid a . \exists > 1 . \exists <$ $b :=$		Testul de primalitate: $\forall a \in \mathbb{N} : (\forall d \in \mathbb{N} : 1 < d < \sqrt{a} \rightarrow d \nmid a) \rightarrow a \in \mathbb{P}$ Dacă a nu are divizori proprii mai mici ca $\sqrt{a}$ și mai mari ca 2, atunci a este prim.
	$\wedge :: \exists . a \in \mathbb{N} p .$		

Teoremele 10-11 - Proprietățile numerelor prime

10.	$a, b \in \mathbb{N} . a \in \mathbb{N} p . a \nmid b : \exists : a \nmid b$	(Eucl. VII, 29)	Dacă a și b sunt numere naturale, a este un număr prim, și a nu divide b , atunci a și b sunt coprime. $\forall a, b \in \mathbb{N} : (a \in \mathbb{P} \wedge a \nmid b) \rightarrow \text{cmmdc}(a, b) = 1$
11.	$a, b, c \in \mathbb{N} . a \nmid b \exists . a \nmid b : \exists . a \nmid c.$		Dacă a, b, c sunt numere naturale, dacă a divide b și a este coprime cu b , atunci a divide c . $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a bc \wedge \text{cmmdc}(a, b) = 1) \rightarrow a c$
12.	$a, b \in \mathbb{N} . m = M \exists \nmid (a, b) : \exists : a/m \nmid .$ $b/m.$		Dacă a, b sunt numere naturale și m este cel mai mare divizor comun al lui



			a și b, atunci a/m și b/m sunt coprime. $\forall a, b \in \mathbb{N}$: Dacă $m = \text{cmmdc}(a, b)$, atunci $\text{cmmdc}(a/m, b/m) = 1$
13.	$a \in \mathbb{N}_p, b, c \in \mathbb{N} : a \nmid bc : \mathcal{O} : a \nmid b \vee a \nmid c.$	(Eucl. VII, 30)	Dacă un număr prim p divide produsul $b \times c$, atunci p divide pe b sau p divide pe c. Pentru $a \in \mathbb{P}, b, c \in \mathbb{N}$: dacă $a \mid b \times c$, atunci $a \mid b$ sau $a \mid c$
14.	$a \in \mathbb{N}_p, b, n \in \mathbb{N} : \mathcal{O} : a \nmid bn \vee a \nmid b.$	(Eucl. IX, 12)	Dacă p este prim iar n și p sunt numere naturale, atunci p divide pe $b \times n$ dacă și numai dacă p divide pe b. $\forall p \in \mathbb{P}, \forall b \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : p \mid b \times n \leftrightarrow p \mid b$
15.	$a, b, c \in \mathbb{N} : a \nmid b, c \nmid a : \mathcal{O} : c \nmid b.$	(Eucl. VII, 23)	Dacă a, b și c sunt numere naturale, a și b sunt coprime și c divide pe a, atunci c și b sunt coprime. Deci, dacă: $\text{cmmdc}(a, b) = 1$ și $c \mid a$, atunci $\text{cmmdc}(c, b) = 1$. $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : \text{cmmdc}(a, b) = 1 \wedge c \mid a \rightarrow \text{cmmdc}(c, b) = 1$
16.	$a, b, c \in \mathbb{N} : \mathcal{O} : a \nmid b, a \nmid c := a \nmid bc.$	(Eucl. VII, 24)	Dacă a este coprim cu b și cu c, atunci a este coprim cu produsul $b \times c$. Adică: $\text{cmmdc}(a, b) = 1$ și $\text{cmmdc}(a, c) = 1$ dacă și numai dacă $\text{cmmdc}(a, b \times c) = 1$. $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : \text{cmmdc}(a, b) = 1 \wedge \text{cmmdc}(a, c) = 1 \rightarrow \text{cmmdc}(a, b \times c) = 1$
17.	$a, b, c \in \mathbb{N} : b \nmid c, b \nmid a, c \nmid a : \mathcal{O} : bc \nmid a.$		$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (\text{cmmdc}(b, c) = 1 \wedge b \nmid a \wedge c \nmid a) \rightarrow bc \nmid a$ Pentru orice numere naturale a, b, c, dacă b și c sunt prime între ele (coprime), și b divide pe a, și c divide pe a, atunci produsul $b \times c$ divide pe a.



			Deci, dacă două numere coprime divid ambele un al treilea număr, atunci produsul lor divide și el acel număr.
18.	$a, b, c \in \mathbb{N}$ și $\exists d : d \mid (ac, b) = d \mid (c, b)$.		Dacă a, b și c sunt numere naturale și a este coprim cu b, atunci cel mai mare divizor comun al lui a ori c și b este egal cu cel mai mare divizor comun al lui c și b. Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}$ și $\text{cmmdc}(a, b) = 1$, atunci $\text{cmmdc}(ac, b) = \text{cmmdc}(c, b)$ „pa” este o notație specială, creată de domnul Peano, probabil pentru a simboliza relația de coprimăritate. În acest context, $\text{pa } b$ s-ar putea traduce ca „a este prim cu b”. Iar, așa ceva înseamnă că cele două numere, a și b, nu au divizori comuni, cu excepția numărului 1. Altfel spus, cel mai mare divizor comun al lor este egal cu 1.

Teoremele 19-21 - Cel mai mic multiplu comun:

19.	$a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists d \mid (a, b) \in \mathbb{N}$.		Dacă a și b sunt numere naturale, atunci există un unic cel mai mare divizor al lui a și b, care este un număr natural. $\forall a, b \in \mathbb{N}: \text{cmmmdc}(a, b) \in \mathbb{N}$
20.	$a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists d \mid (a, b) = ab/M \Rightarrow d \mid (a, b)$.	(Eucl. VII, 34)	Produsul dintre cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun a două numere naturale este întotdeauna egal cu produsul celor două numere. $\forall a, b \in \mathbb{N}: \text{cmmdc}(a, b) \times \text{cmmmc}(a, b) = a \times b$
21.	$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists d \mid a, c \mid b : d \mid (a, b)$.	(Eucl. VII, 35)	Dacă c divide pe a și c divide pe b , atunci c divide pe $\text{cmmdc}(a, b)$.



			$\forall a, b, c \in \mathbb{N}: c \mid a \wedge c \mid b \rightarrow c \mid \text{cm-mdc}(a, b)$
22.	$x \in \mathbb{N} . x < 41 : \exists . 41 - x + x^2 \in \mathbb{N}_p.$		Dacă x este un număr natural mai mic decât 41, atunci valoarea expresiei $41-x+x^2$ este un număr prim. $\forall x \in \mathbb{N}, x < 41 \rightarrow (41 - x + x^2) \in P$
23.	$M . \mathbb{N}_p := \wedge$	(Eucl. IX, 20)	Prin definiție, faptul că numerele prime sunt infinit de multe este adevărat. Deci: „Infinitatea numerelor prime”: $\mathbb{P} = \aleph_0$ Cardinalitatea mulțimii numerelor prime este numerabilă și infinită. Mulțimea numerelor prime este infinită Iar, considerând demonstrația domnului Euclid: Presupunem că există doar un număr finit de numere prime: $p_1, p_2 \dots p_n$. Considerăm $N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$. N nu este divizibil cu niciunul dintre $p_1, p_2 \dots p_n$. Prin urmare, N are un divizor prim q care nu este în „listă”. Doar că, așa ceva reprezintă o contradicție - deci există infinit de multe numere prime.
23.	$n \in \mathbb{N}_p . a \in \mathbb{N} . a - \exists n : \exists . a^{n-1} - 1 \exists n.$	(Fermat)	Dacă n este un număr prim și a este un număr natural care nu este divizibil cu n, atunci a la puterea $n-1$ minus 1 este divizibil cu n. $\forall n \in P \forall a \in \mathbb{N} (n \nmid a \rightarrow n \mid (a^{n-1} - 1))$



		De fapt, aceasta reprezintă „Mica Teoremă a lui Fermat” și se referă la proprietatea numerelor întregi în relație cu un număr prim: $a^{(n-1)} - 1$ este divizibil cu n . Și este folosită în criptografie și în teoria numerelor.
--	--	---

„§8. Numerorum rationes.

Explicationes.

Si $p, q \in \mathbb{N}$, tunc $\frac{p}{q}$ legitur ratio numeri p numero q . Signum $\mathbb{R}$ legitur duorum numerorum ratio, et indicat numeros rationales positivos.

Definitiones.”

§8. Raporturile numerelor.

Explicații.

Dacă p, q aparțin lui $\mathbb{N}$ (mulțimea numerelor naturale) atunci $\frac{p}{q}$ se citește raportul numărului p cu numărul q . Simbolul $\mathbb{R}$ (actualmente $\mathbb{Q}$) se citește raportul a două numere și indică numerele raționale pozitive.

Definiții.

Notăția originală		Interpretare contemporană
1.	$m, p, q \in \mathbb{N} \supset m \frac{p}{q} = \frac{mp}{q}$	Multiplicarea cu un număr natural: $m, p, q \in \mathbb{N} \supset m(p/q) = (m \times p)/q$ Pentru orice numere naturale m, p, q , produsul unui număr natural m cu o fracție p/q este egal cu fracția $(m \times p)/q$. Precum, spre exemplu: $3 \times (2/5) = (3 \times 2)/5 = 6/5$
2.	$p, q, p', q' \in \mathbb{N} \supset \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : x \frac{p}{q} = x \frac{p'}{q'}$	Egalitatea fracțiilor $p, q, p', q' \in \mathbb{N} \supset (p/q) = (p'/q') \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : x(p/q) = x(p'/q') \in \mathbb{N} \wedge x(p/q) = x(p'/q')$ Două fracții p/q și p'/q' sunt egale dacă și numai dacă există un număr natural x astfel că atât $x \times$



		(p/q) cât și $x \times (p'/q')$ sunt numere naturale și $x \times (p/q) = x \times (p'/q')$. De fapt, două fracții sunt egale dacă „produsele încrucișate” sunt egale: $p/q = p'/q' \leftrightarrow p \times q' = p' \times q$ Precum, spre exemplu: $2/3 = 4/6$ pentru că $2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$
3.	$\mathbb{R} = :: [x \in] \therefore p, q \in \mathbb{N} . \frac{p}{q} = x : - =$ $\wedge .$	Mulțimea numerelor raționale pozitive $\mathbb{Q}^+ = \{x \mid \exists p, q \in \mathbb{N}: p/q = x\}$ Mulțimea $\mathbb{Q}^+$ (numerele raționale pozitive) este formată din toate elementele care pot fi reprezentate ca rapoarte p/q unde p, q sunt numere naturale.
4.	$p \in \mathbb{N} \supset \frac{p}{1} = p.$	Identificarea numerelor naturale cu fracțiile $p \in \mathbb{N} \supset p/1 = p$ Orice număr natural p poate fi reprezentat ca fracția $p/1$, identificând astfel numerele naturale cu o submulțime a numerelor raționale.

„Theoremata.”

Teoreme.

Notăția originală		Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
5.	$p, q, p', q' \in \mathbb{N} \supset :: \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} . = . pq' =$ $p'q.$	(Eucl. VII, 19) Criteriul de egalitate (Euclid VII, 19) Pentru $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$: $p/q = p'/q' \leftrightarrow p \times q' = p' \times q$ Precum, spre exemplu: $6/8 = 3/4$ pentru că $6 \times 4 = 8 \times 3 = 24$ $15/20 = 3/4$ pentru că $15 \times 4 = 20 \times 3 = 60$
Dem.	$\text{Hp. } \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} : \supset \therefore qq', qq' \frac{p}{q}, qq' \frac{p'}{q'} \in$ (1) $\mathbb{N} . p2$	1. Sensul direct: Dacă $p/q = p'/q'$, atunci multiplicând cu qq' se obține: $qq' \times (p/q) = qq' \times (p'/q')$ deci $pq' = p'q$
	$\therefore \supset \therefore qq' \frac{p}{q} = qq' \frac{p'}{q'} . qq' \frac{p}{q} = pq' .$	2. Sensul invers: Dacă $pq' = p'q$, atunci



	$qq' \frac{p'}{q'} =$ $p'q \therefore \supset \therefore pq' = p'q.$		pentru orice $x \in \mathbb{N}$: $x \times (p/q) \times qq' = x \times pq' = x \times p'q = x \times (p'/q') \times qq'$, deci $x \times (p/q) = x \times (p'/q')$
	$\text{Hp. } pq' = p'q \therefore \supset \therefore x \in \mathbb{N} . x \frac{p}{q} , x \frac{p'}{q'} \quad (2)$ $\in \mathbb{N} : \supset x :$		
	$xp'q' = xp'q : \supset (x \frac{p}{q})qq' = (x \frac{p'}{q'})qq'$ $: \supset :$ $x \frac{p}{q} = x \frac{p'}{q'} .$		
	(1)(2). $\supset$. Th.		
6.	$m, p, q \in \mathbb{N} . \supset . \frac{p}{q} = \frac{mp}{mq} .$	(Eucl. VII, 17)	Amplificarea fracțiilor (Euclid VII, 17) Pentru $m, p, q \in \mathbb{N}$: $p/q = (m \times p)/(m \times q)$ Multiplicând numărătorul și numitorul unei fracții cu același număr natural diferit de zero, fracția rămâne neschimbată. Precum, spre exemplu: $2/3 = 4/6 = 6/9 = 8/12$ $5/7 = 15/21 = 25/35$
7.	$p, q \in \mathbb{N} . m \in \mathbb{N} . m \nmid p . m \nmid q : \supset .$ $\frac{p}{q} = \frac{p/m}{q/m} .$		Simplificarea fracțiilor Pentru $p, q \in \mathbb{N}$ și $m \in \mathbb{N}$ cu $m \mid p$ și $m \mid q$: $p/q = (p/m)/(q/m)$ Dacă un număr natural m divide atât numărătorul cât și numitorul unei fracții, fracția poate fi simplificată prin împărțirea ambilor termeni la m. Precum, spre exemplu: $12/18 = 6/9 = 2/3$ (împărțind la 6) $15/25 = 3/5$ (împărțind la 5)
8.	$p, q, p', q' \in \mathbb{N} . p \nmid q . p' \nmid q' . \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ $: \supset : p = p' . q = q' .$		Fracții ireductibile: Pentru $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$ cu $\text{cmmdc}(p, q) = \text{cmmdc}(p', q') = 1$: dacă $p/q = p'/q'$ atunci $p = p'$ și $q = q'$



			Fracțiile ireductibile (în forma cea mai simplă) au o reprezentare unică.
9.	$p, q, p', q' \in \mathbb{N} \cdot p' \nmid q' \cdot \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} : \exists: p'/p =$ $q'/q = m \in \mathbb{D}(p, q).$		Proporționalitatea: Pentru $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$ cu $\text{cmmdc}(p', q') = 1$ și $p/q = p'/q'$: $p'/p = q'/q = m$ unde m divide $\text{cmmdc}(p, q)$ Dacă două fracții sunt egale și una este ireductibilă, atunci cealaltă se obține prin amplificare cu un factor comun. Precum spre exemplu: Dacă $6/9 = 2/3$, atunci $2/6 = 3/9 = 1/3$ (factorul $m = 3$)
10.	$p, q, p', q' \in \mathbb{N} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \cdot p \nmid q \cdot q' <$ $q := \wedge$	(Eucl. VII, 21)	Unicitatea reprezentării ireductibile (Euclid VII, 21) Pentru $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$: dacă $p/q = p'/q'$, $\text{cmmdc}(p, q) = 1$ și $q' < q$, atunci apare o contradicție. Prin urmare, „fracția ireductibilă” are numitorul cel mai mic dintre toate reprezentările echivalente.
11.	$p, q, p', q' \in \mathbb{N} : \exists: \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \cdot = \cdot \frac{p}{q'} = \frac{p}{q'}$ $\cdot =$	(Eucl. VII, 13)	Regula celor trei reprezentări (Euclid VII, 13) Pentru $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$: $p/q = p'/q' \leftrightarrow p/p' = q/q' \leftrightarrow p/q = p'/q'$ Trei forme echivalente de a exprima proporționalitatea. Precum, spre exemplu: $6/8 = 9/12 \leftrightarrow 6/9 = 8/12 \leftrightarrow 6 \times 12 = 9 \times 8 = 72$
12.	$p, q \in \mathbb{N} : \exists: [M \in] : m \in \mathbb{N} \cdot m \frac{p}{q} \in \mathbb{N} : \cdot$ $\cdot =$		Existența multiplilor întregi: Pentru $p, q \in \mathbb{N}$: $\exists m \in \mathbb{N}$ astfel încât $m \times (p/q) \in \mathbb{N}$
	$\wedge$		



		Orice fracție, multiplicată cu un număr natural suficient de mare, dă un număr natural. Precum, spre exemplu: Pentru $\frac{2}{3}$, dacă $m = 3$, se obține $3 \times \frac{2}{3} = 2 \in \mathbb{N}$
12'.	$a \in \mathbb{R} . \exists :: [m \in \mathbb{N} : m a \in \mathbb{N} . \therefore - = \wedge .$	Versiunea generală Pentru $a \in \mathbb{Q}^+ : \exists m \in \mathbb{N}$ astfel încât $m \times a \in \mathbb{N}$
13.	$p, q, p', q' \in \mathbb{N} . \exists :: [(r, s, t) \in \mathbb{N} : \frac{p}{q} = \frac{r}{t} . \frac{p'}{q'} = \frac{s}{t} . \therefore - = \wedge .$	Reducerea la același numitor (pentru 2 fracții) Pentru $p, q, p', q' \in \mathbb{N} : \exists r, s, t \in \mathbb{N}$ astfel încât: $p/q = r/t$ și $p'/q' = s/t$ Orice două fracții pot fi aduse la același numitor. Precum spre exemplu: $\frac{2}{3}$ și $\frac{3}{4} \rightarrow \frac{8}{12}$ și $\frac{9}{12}$
13'.	$a, b \in \mathbb{R} . \exists :: [(r, s, t) \in \mathbb{N} : a = \frac{r}{t} . b = \frac{s}{t} . \therefore - = \wedge$	Versiunea generală: Pentru $a, b \in \mathbb{Q}^+ : \exists r, s, t \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = r/t$ și $b = s/t$
14.	$a, b, c \in \mathbb{R} . \exists :: [(m, n, p, q) \in \mathbb{N} : a = \frac{m}{q} . b = \frac{n}{q} . c = \frac{p}{q} . \therefore - = \wedge$	Reducerea la același numitor (pentru 3 fracții) Pentru $a, b, c \in \mathbb{Q}^+ : \exists m, n, p, q \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = m/q, b = n/q, c = p/q$ Orice număr finit de fracții poate fi redus la același numitor.
15.	$p, q, r \in \mathbb{N} . a = \frac{p}{r} . b = \frac{q}{r} : \exists : a = b . =$	Regula simplificării: Pentru $p, q, r \in \mathbb{N}$ cu $a = p/r$ și $b = q/r$: $a = b$ și $p = q$
	$. p =$ $q.$	



			Fracțiile cu același numitor sunt egale dacă și numai dacă au același numărător.
16.	$m \in \mathbb{N} . a, b \in \mathbb{R} . a = b . ma \in \mathbb{N} : \supset . mb \in \mathbb{N} .$		Conservarea proprietății de număr natural: Pentru $m \in \mathbb{N}$ și $a, b \in \mathbb{Q}^+$: dacă $a = b$ și $m \times a \in \mathbb{N}$, atunci $m \times b \in \mathbb{N}$ Proprietățile aritmetice se conservă prin egalitate.
17.	$a, b, c \in \mathbb{R} . \supset \therefore a = a$ $\supset \therefore a = b . = . b = a .$ $\supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c .$		Proprietățile relației de egalitate: Pentru $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$: Reflexivitatea: $a = a$ Simetria: $a = b \leftrightarrow b = a$ Tranzitivitatea: $a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$ Egalitatea pe $\mathbb{Q}^+$ este o relație de echivalență.
18.	$\mathbb{N} \supset \mathbb{R} .$		Includerea numerelor naturale: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}^+$ Numerele naturale formează o submulțime a numerelor raționale pozitive.

„Definitiones.”

Definiții

Notăția originală	Interpretare contemporană
19. $a, b \in \mathbb{R} . \supset :: a < b . = \therefore x \in \mathbb{N} . xa, xb \in \mathbb{N} : \supset . xa < xb .$	Relația „mai mic”: Pentru $a, b \in \mathbb{Q}^+ \supset a < b \equiv \exists x \in \mathbb{N} : x \times a, x \times b \in \mathbb{N} \wedge x \times a < x \times b$ Pentru numerele raționale pozitive a și b, spunem că $a < b$ dacă există un număr natural x astfel că atât $x \times a$ cât și $x \times b$ sunt numere naturale și $x \times a < x \times b$.
20. $a, b \in \mathbb{R} . \supset : b > a . = . a < b .$	Relația „mai mare”:



		Pentru $a, b \in \mathbb{Q}^+$: $b > a \equiv a < b$
--	--	---

„Theoremata”

Teoreme

Notăția originală		Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
21.	$p, q, r \in \mathbb{N} . a = \frac{p}{r} . b = \frac{q}{r} : \supset: a < b . =$ $. p < q.$	Comparația fracțiilor cu același numitor: Pentru $p, q, r \in \mathbb{N}$ și $a = p/r, b = q/r$: $a < b \leftrightarrow p < q$ Precum, spre exemplu: $3/7 < 5/7$ pentru că $3 < 5$ $11/13 > 8/13$ pentru că $11 > 8$
22.	$p, q, p', q' \in \mathbb{N} . \supset: \frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} . = . pq' < p'q.$	Criteriul general de comparare Pentru $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$: $p/q < p'/q' \leftrightarrow p \times q' < p' \times q$ Regula generală pentru compararea fracțiilor.
23.	$p, q, r \in \mathbb{N} . a = \frac{r}{p} . b = \frac{r}{q} : \supset: a < b . =$ $. p > q.$	Compararea cu numitori invers proporționali: Pentru $p, q, r \in \mathbb{N}$ cu $a = r/p$ și $b = r/q$: $a < b \leftrightarrow p > q$ Pentru fracții cu același numărător, cea cu numitorul mai mare este mai mică. Precum, spre exemplu: $5/8 < 5/6$ pentru că $8 > 6$
24.	$p, q, p', q' \in \mathbb{N} . \frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} : \supset . \frac{p'}{q'} <$ $\frac{p+p'}{q+q'} < \frac{p'}{q'}.$	Proprietatea densității (forma fracțiilor): Pentru $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$ cu $p/q < p'/q'$: $p/q < (p+p')/(q+q') < p'/q'$ Între orice două numere raționale distincte există întotdeauna alt număr ra-



		țional (proprietatea densității). Precum, spre exemplu: Între $1/3$ și $1/2$ se află $(1+1)/(3+2) = 2/5$ și într-adevăr: $1/3 < 2/5 < 1/2$
25.	$a \in \mathbb{R} . \sup . \therefore ? . \sup > a : - = \wedge .$	Proprietatea lui Arhimede (partea I-a): Pentru $a \in \mathbb{Q}^+ : \exists b \in \mathbb{Q}^+$ astfel încât $b > a$ $\mathbb{Q}^+$ nu are un element maximal. Și deși domnia sa nu demonstrează așa ceva, s-ar putea presupune totuși că: Să presupunem prin absurd că există un număr rațional pozitiv maximal $m \in \mathbb{Q}^+$. Atunci pentru orice $a \in \mathbb{Q}^+$, avem $a \leq m$. Dar, se poate construi numărul $m' = m + 1$. Evident: $m' \in \mathbb{Q}^+$ (întrucât reprezintă suma a două numere raționale pozitive) $m' = m + 1 > m$ Iar, așa ceva contrazice faptul că m ar fi maximal. Prin urmare, nu poate exista un element maximal în $\mathbb{Q}^+$.
26.	$a \in \mathbb{R} . \sup . \therefore \mathbb{R} . \exists < a : - = \wedge .$	Proprietatea lui Arhimede (partea II-a): Pentru $a \in \mathbb{Q}^+ : \exists b \in \mathbb{Q}^+$ astfel încât $b < a$ $\mathbb{Q}^+$ nu are element minimal. Și deși nici așa ceva nu demonstrează domnia sa, s-ar putea presupune în continuare că: Există un element minimal $m \in \mathbb{Q}^+$.



		Atunci pentru orice $a \in \mathbb{Q}^+$, avem $m \leq a$. Dar s-ar putea construi $m/2$. Și desigur, $m/2 \in \mathbb{Q}^+$ (întrucât reprezintă împărțirea unui număr rațional pozitiv la 2) Doar că, $m/2 < m$ ceea ce conduce spre o contradicție! Deci nu poate exista un element minimal. Iar, zero ... nu este acceptat.
27.	$a, b \in \mathbb{R} . a < b : \sup \{ x \in \mathbb{R} : x < b \} = a$	Densitatea numerelor raționale: Pentru $a, b \in \mathbb{Q}^+$ cu $a < b$: $\exists c \in \mathbb{Q}^+$ astfel încât $a < c < b$ Între orice două numere raționale distincte există întotdeauna un alt număr rațional.
28.	$a, b \in \mathbb{R} : \sup \{ x \in \mathbb{R} : x < a \} = a$ $\sup \{ x \in \mathbb{R} : x < b \} = b$ $\sup \{ x \in \mathbb{R} : x < a \} = a$ $\sup \{ x \in \mathbb{R} : x < b \} = b$	Tricotomia și incompatibilitatea: Pentru $a, b \in \mathbb{Q}^+$: Nu poate fi simultan $a < b$ și $a = b$ Nu poate fi simultan $a > b$ și $a = b$ Nu poate fi simultan $a < b$ și $a > b$ Exact una dintre relațiile $a < b$, $a = b$, $a > b$ este adevărată Relația de ordine pe $\mathbb{Q}^+$ este „perfectă”.
29.	$a, b, c \in \mathbb{R} : \sup \{ x \in \mathbb{R} : x < a \} = a$ $\sup \{ x \in \mathbb{R} : x < b \} = b$ $\sup \{ x \in \mathbb{R} : x < c \} = c$	Tranzitivitatea ordinii: Pentru $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$: $a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c$ $a < b \wedge b \leq c \rightarrow a < c$ Relația de ordine este tranzitivă.

„Definitiones.”



Definiții.

Notația originală	Interpretare contemporană
30. $a, b \in \mathbb{R} . \supset . a + b = [c \in \mathbb{R} : \therefore x \in \mathbb{N} . xa, xb, xc \in \mathbb{N} : \supset x . xa + xb = xc).$	Adunarea. Suma a două numere raționale pozitive a și b este acel număr rațional pozitiv c, astfel încât pentru orice număr natural x care face $x \times a$, $x \times b$ și $x \times c$ numere naturale, $x \times a + x \times b = x \times c$. Cu alte cuvinte: Dacă $a+b=c$ atunci există un număr natural x astfel încât: $x \times a + x \times b = x \times c$. Precum spre exemplu, pentru a aduna $1/2$ și $1/3$, se găsește un numitor comun, de exemplu $x=6$. Și atunci: $6 \times (1/2) + 6 \times (1/3) = 6 \times (c) \rightarrow 3 + 2 = 6c \rightarrow 5 = 6c \rightarrow c = 5/6$.
31. $a, b \in \mathbb{R} . \supset :: b - a = \therefore [x \in \mathbb{R} . a + x = b).$	Scăderea. Diferența $b - a$ este acel număr rațional pozitiv x pentru care $a + x = b$. Cu alte cuvinte: Diferența dintre b și a este acel număr real care, adunat la a, îl „produce” pe b. Precum, spre exemplu, să presupunem că vrem să calculăm $5/6 - 1/3$. Conform definiției domnului Peano, se caută un număr rațional x astfel încât: $1/3 + x = 5/6$ Și se caută un numitor comun pentru toate fracțiile, în acest caz, 6. Înmulțim întreaga ecuație cu 6: $6 \times (1/3 + x) = 6 \times (5/6)$ $6 \times (1/3) + 6 \times x = 5$ $2 + 6 \times x = 5$ Și se obține o ecuație cu numere întregi (numere naturale).



		$6x=5-2$ $6x=3$ $x=3/6$ $x=1/2$ Astfel, conform definiției domnului Peano, $5/6-1/3=1/2$, întrucât $1/3+1/2=5/6$.
32.	$a, b \in \mathbb{R} . \supset . ab = [c \in \mathbb{R} . \therefore x \in \mathbb{N} .$ $xa, (xa)b, xc \in$ $\mathbb{N} : \supset x . (xa)b = xc$.	Înmulțirea. Produsul a două numere raționale pozitive a și b este acel număr rațional pozitiv c, care pentru orice număr natural x, face ca: $x \times a \times b = x \times c$. Precum spre exemplu, pentru a înmulți $2/3$ cu $3/4$, se căutăm un x, care să facă $x \times (2/3)$ și $(x \times (2/3)) \times (3/4)$ numere întregi. Deci, pentru $x=6$, avem $6 \times (2/3)=4$. Apoi, $4 \times (3/4)=3$. Rezultatul este un număr natural, iar ecuația domnului Peano devine $3=6 \times c$, de unde $c=3/6=1/2$.
33.	$a, b \in \mathbb{R} . \supset . b/a = [x \in \mathbb{R} . ax = b)$.	Împărțirea. Pentru numerele raționale pozitive a și b, „câtul” b/a este acel număr rațional pozitiv x pentru care $a \times x = b$. Precum spre exemplu, să presupunem că vrem să calculăm $(2/3)/(1/2)$. Conform definiției domnului Peano, se caută un număr rațional x astfel încât: $(1/2) \times x = 2/3$ Pentru a rezolva ecuația, se înmulțesc ambele părți ale acesteia cu inversul lui $1/2$, adică cu $2/1$ (sau 2). $2 \times (1/2 \times x) = 2 \times (2/3)$ $(2 \times 1/2) \times x = 4/3$ $1 \times x = 4/3$ $x = 4/3$



	Și astfel, conform definiției domnului Peano, $(2/3)/(1/2)=4/3$, întrucât $(1/2) \times (4/3)=4/6=2/3$.
--	---

„Theoremata”

Teoreme.

Notăția originală		Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
34.	$p, q, r \in \mathbb{N} . \supset \frac{p}{r} + \frac{q}{r} = \frac{p+q}{r} .$	Adunarea fracțiilor cu același numitor: Pentru $p, q, r \in \mathbb{N}$: $p/r + q/r = (p+q)/r$
35.	$a, b \in \mathbb{R} . \supset a + b \in \mathbb{R} .$	„Închiderea la adunare”: Pentru $a, b \in \mathbb{Q}^+$: $a + b \in \mathbb{Q}^+$
36.	$p, q, r \in \mathbb{N} . p < q : \supset \frac{q}{r} - \frac{p}{r} = \frac{q-p}{r} .$	Scăderea fracțiilor cu același numitor: Pentru $p, q, r \in \mathbb{N}$ cu $p < q$: $q/r - p/r = (q-p)/r$
37.	$a, b \in \mathbb{R} . a < b : \supset b - a \in \mathbb{R} .$	„Închiderea la scădere”: Pentru $a, b \in \mathbb{Q}^+$ cu $a < b$: $b - a \in \mathbb{Q}^+$
38.	$p, q, p', q' \in \mathbb{N} . \supset \frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'} .$	Înmulțirea fracțiilor: Pentru $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$: $(p/q) \times (p'/q') = (p \times p')/(q \times q')$
39.	$a, b \in \mathbb{R} . \supset ab \in \mathbb{R} .$	„Închiderea la înmulțire”: Pentru $a, b \in \mathbb{Q}^+$: $a \times b \in \mathbb{Q}^+$
40.	$p, q, p', q' \in \mathbb{N} . \supset \frac{p}{q} / \frac{p'}{q'} = \frac{pq'}{p'q} .$	Împărțirea fracțiilor: Pentru $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$: $(p/q) / (p'/q') = (pq')/(p'q)$
41.	$a, b \in \mathbb{R} . \supset b/a \in \mathbb{R} .$	„Închiderea la împărțire”: Pentru $a, b \in \mathbb{Q}^+$: $b/a \in \mathbb{Q}^+$



42.	$p, q \in \mathbb{N} : \mathcal{D} . \frac{p}{q} = \frac{p}{q} .$	„Reflexivitatea” ... Pentru $p, q \in \mathbb{N}$: $p/q = p/q$
-----	---	--

“§9. Rationalum systemata. Irrationales.

Explicatio.

Si $a \in K \mathbb{R}$, signum Ta legitur terminus summus, vel limes summus classis a .
Supra hoc novum ens relationes ac operationes tantum definimus.

Definitiones.”

§9. Sisteme de numere raționale. Numere iraționale.

Explicație.

Dacă $a \in K \mathbb{R}$ (actualmente $\mathbb{Q}$), semnul Ta se citește limită superioară (sau termen superior) sau limită superioară a clasei a .

Asupra acestei noi entități, definim doar relații și operații.

Definiții.

Notăția originală	Interpretare contemporană
1. $a \in K \mathbb{R} . x \in \mathbb{R} : \mathcal{D} :: x < Ta . = . \therefore a . > x : - = \wedge .$	Pentru $a \in K \mathbb{Q}$ și $x \in \mathbb{Q}$: dacă $x < Ta$, atunci există elemente în a mai mari decât x $\forall x < \sup(a) \rightarrow \exists y \in a : y > x$
2. $a \in K \mathbb{R} . x \in \mathbb{R} : \mathcal{D} :: x = Ta . = : : a . > x := \wedge :: u \in \mathbb{R} . u < x : \mathcal{D} x . \therefore a . > u : - = \wedge .$	Pentru $a \in K \mathbb{Q}$ și $x \in \mathbb{Q}$: $x = Ta$, dacă și numai dacă pentru orice $u < x$ există elemente în a mai mari decât u $x = \sup(a) \leftrightarrow \forall u < x \rightarrow \exists y \in a : y > u$
3. $a \in K \mathbb{R} . x \in \mathbb{R} : \mathcal{D} . \therefore x > Ta . = : x - < . x - = .$	Pentru $a \in K \mathbb{Q}$ și $x \in \mathbb{Q}$: dacă $x > Ta$, atunci $x \neq Ta$ $x > \sup(a) \rightarrow x \neq \sup(a)$

„Theoremata.”

Teoreme.

Notăția originală	Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
4. $x \in \mathbb{R} . \mathcal{D} :: x = . \therefore T : \mathbb{R} . \exists < x .$	Formula Russell:



			Pentru $x \in \mathbb{Q}$ există $T: \mathbb{Q}$ astfel încât $T < x$
--	--	--	---

„Explicatio.

Signum $\mathbb{Q}$ legitur quantitas, numerosque indicat reales positivos, rationales aut irrationales, 0 et ∞ exceptis.

Definitiones.”

Explicație.

Simbolul $\mathbb{Q}$ (actualmente $\mathbb{R}$) se citește „cantitate” și reprezintă numere reale pozitive, raționale sau iraționale, cu excepția lui 0 și ∞ (infinit).

Definiții.

Notăția originală		Interpretare contemporană
5.	$\mathbb{Q} = [x \in (a \in \mathbb{K} : a = \bigwedge : \mathbb{R} \in > . - = \bigwedge : = x \therefore - = \bigwedge)]$	$\mathbb{R}$ este mulțimea elementelor x pentru care există o clasă a nevidă din $\mathbb{Q}$ astfel încât $Ta = x$ $\mathbb{R} = \{\sup(a) : a \subseteq \mathbb{Q}, a \neq \emptyset, a \text{ mărginită superior}\}$
6.	$a, b \in \mathbb{Q} . \sup : a = b . = \therefore \mathbb{R} . \exists < a := : \mathbb{R} . \exists < b$	Pentru $a, b \in \mathbb{R} : a = b$ dacă și numai dacă pentru orice $x \in \mathbb{Q}$, $x < a$ este echivalent cu $x < b$ $a = b \leftrightarrow (-\infty, a) = (-\infty, b)$
7.	$a, b \in \mathbb{Q} . \sup : a < b . = \therefore \mathbb{R} . \exists > a . \exists < b : - = \bigwedge$	Pentru $a, b \in \mathbb{R} : a < b$ dacă și numai dacă există $x \in \mathbb{Q}$, cu $a < x < b$ $a < b \leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : a < x < b$
8.	$a, b \in \mathbb{Q} . \sup : b > a . = . a < b$	Definiția standard a inegalității: Pentru $a, b \in \mathbb{R} : b > a$ este echivalent cu $a < b$

„Theoremata”

Teoreme.

Notăția originală		Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
9.	$a \in \mathbb{Q} . \sup : \mathbb{R} . < a : - = \bigwedge$	Pentru $a \in \mathbb{R}$, există numere reale mai mici decât a
10.	$a \in \mathbb{Q} . \sup : \mathbb{R} . > a : - = \bigwedge .$	Pentru $a \in \mathbb{R}$, există numere reale mai



			mari decât a
--	--	--	--------------

11.	$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$.		$\mathbb{Q}$ este inclus în $\mathbb{R}$.
-----	-----------------------------------	--	--

Subsistunt quoque propositiones quae a P17, 28, 29 in §8 obtinentur, si loco $\mathbb{R}$ legatur $\mathbb{Q}$.

Definitiones.

Desigur, propozițiile care se obțin din P17, 28, 29 în §8 rămân tot atât de valide, dacă în locul lui $\mathbb{R}$ se citește $\mathbb{Q}$.

Definiții.

Notăția originală	Interpretare contemporană ⁴³
12. $a, b \in \mathbb{Q} . \sup . a + b = T [z \in] ([(x, y) \in] : \mathbb{R} . x < a . y < b . x + y = z . \therefore - = \wedge)$.	Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ și pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$ Suma $a + b = \sup$ um-ul mulțimii $\{x + y : x < a, y < b\}$ Sau: $a + b = \sup\{x + y : x \in (-\infty, a) y \in (-\infty, b)\}$
13. $a, b \in \mathbb{Q} . \sup . ab = T [z \in] ([(x, y) \in] : x, y \in \mathbb{R} . x < a . y < b . xy = z . \therefore - = \wedge)$.	Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ și pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$ Produsul $ab = \sup$ um-ul mulțimii $\{xy : x < a, y < b\}$ Sau: $ab = \sup\{xy : x \in (-\infty, a) y \in (-\infty, b)\}$

Ut valeant hae definitiones, demonstrandum est subsistere propositiones 12 et 13, si $a, b \in \mathbb{R}$.

„Subtractionem et divisionem ut operationes inversas additiones et multiplicationis definire licet, illarumque proprietates demonstrare.

§10. Quantitatum systemata.

Explicationes.

Si $a \in K \mathbb{Q}$, signa $I a$, Ea , Lb leguntur: interior, exterior, limes classis a .

Definitiones.”

43 Doar că, în accepțiuni contemporane am evitat să mai specific – așa precum a făcut domnia sa, că există x, y cu proprietatea $x+y=z$, respectiv $x \times y=z$ și să definec mulțimea tuturor acelor z . În perspectiva domniei sale rolul lui z era de a reprezenta variabila prin care se descrie mulțimea rezultatelor posibile (sume sau produse) și era pur formal, servind doar pentru a se construi „mulțimea de valori”.



Pentru a fi valabile aceste definiții, trebuie demonstrat că propozițiile 12 și 13 se susțin, dacă a, b aparțin lui $\mathbb{R}$ (actualmente $\mathbb{Q}$).

Scăderea și împărțirea pot fi definite ca operații inverse ale adunării și înmulțirii, iar proprietățile lor pot fi demonstrate.

§10. Sisteme de cantități.

Explicații.

Dacă a aparține $K \mathbb{Q}$ (actualmente $\mathbb{R}$), semnele Ia , Ea , Lb se citesc: interiorul, exteriorul, limita clasei a .

Definiții.

Notăția originală		Interpretare contemporană
1.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset Ia = \mathbb{Q} [x \in](u, v) [\in] :: u, v \in \mathbb{Q} . \therefore u < x < v . \therefore \exists u . \exists v : \supset a : . - = \wedge) .$	„Interiorul lui a ” este mulțimea punctelor x pentru care există un interval (u,v) conținut în a . $\text{int}(a) = \{x \in \mathbb{R} : \exists u, v \in \mathbb{R} (u < x < v \wedge (u, v) \subseteq a)\} .$ sau: $\text{int}(a) = \{x \in \mathbb{R} : \exists \epsilon > 0 (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq a\} .$
2.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . Ea = I(- a)$	Exteriorul lui a este interiorul complementarei lui a . $\text{ext}(a) = \text{int}(a^c)$
3.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . Lb = (- Ia)(- Ea) .$	Limita lui a este complementara reuniunii interiorului și exteriorului $\partial a = (\text{int}(a) \cup \text{ext}(a))^c$

„Theoremata”

Teoreme.

Notăția originală		Notăția contemporană reformulată în limbaj natural
4.	$a \in K \mathbb{Q} . x, u, v \in \mathbb{Q} . u < x < v . (\exists u . \exists v : ca) : \supset . x \in Ia$	Definiția punctelor interioare: Dacă x este între u și v și intervalul $(u, v) \in a$, atunci $x \in Ia$.



5.	$a \in K \mathbb{Q} . x \in I_a : \supset [(u, v) \in \mathbb{Q} \therefore u < x < v \therefore \supset u . < v : \supset a] - = \wedge$		Caracterizarea standard a punctelor interioare: $x \in I_a$ dacă și numai dacă există interval (u, v) cu $x \in (u, v) \subseteq a$.
Dem.	$P1 = (P4)(P5)$.		Se combină cele două axiome fundamentale despre intervale și incluziune.

6.	$a \in K \mathbb{Q} . u, v \in \mathbb{Q} . (\exists > u . \exists < \wedge : \supset a) \therefore \supset \therefore \exists > u . \exists < v : \supset I_a$.		Intervalele deschise incluse în a sunt în interiorul lui a Dacă $(u, v) \subseteq a$, atunci $(u, v) \subseteq I_a$
Dem.	$P6 = P4$.		Se bazează direct pe axioma P4 despre intervale. Dacă $(u, v) \subseteq a$, atunci pentru orice $x \in (u, v)$ intervalul (u, v) însuși servește drept vecinătate deschisă a lui x inclusă în a , deci $x \in \text{int}(a)$. Prin urmare $(u, v) \subseteq \text{int}(a)$.

7.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . I_a \supset a$.		Interiorul este inclus în mulțimea originală: $\text{int}(a) \subseteq a$
----	--	--	--

8.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . II_a = I_a$.		Interiorul interiorului este interiorul $\text{int}(\text{int}(a)) = \text{int}(a)$ – idempotența Pentru orice mulțime $a \in K(\mathbb{R})$ avem $\text{int}(\text{int}(a)) = \text{int}(a)$
Dem.	Hp. $(I_a)[a] P7 : \supset . II_a \supset I_a$	(1)	Din teorema 7, știm că $\text{int}(a) \subseteq a$, prin urmare din monotonia interiorului (care urmează din P7): $\text{int}(\text{int}(a)) \subseteq \text{int}(a)$ Pentru incluziunea inversă, considerăm $x \in \text{int}(a)$. Din definiția interiorului (Teorema 5) există $u, v \in \mathbb{R}$ cu $u < x < v$ astfel încât $(u, v) \subseteq a$.
	Hp.	(2)	
	$x, u, v \in \mathbb{Q} . u < x < v . (\exists > u . \exists < v : \supset a)$. $P6 : \supset u, v \in \mathbb{Q} . u < x < v . (\supset u . < v : \supset I_a)$		
	Hp. $x \in I_a . (2) : \supset x \in II_a$	(3)	
	Hp. $(3) : \supset I_a II_a$	(4)	
	Hp. $(1).(4) : \supset Ts$.	(Theor.)	



			Din teorema 6, avem $(u, v) \subseteq \text{int}(a)$ deci $x \in \text{int}((u, v))$. Prin definiția interiorului aplicată lui $\text{int}(a)$ rezultă că $x \in \text{int}(\text{int}(a))$. Prin urmare: $\text{int}(a) \subseteq \text{int}(\text{int}(a))$ Din (1) și (6): $\text{int}(\text{int}(a)) = \text{int}(a)$
9.	$a, b \in K \mathbb{Q} . a \supset b : \supset . Ia \supset Ib$		Monotonia operatorului interior Dacă $a \subseteq b$, atunci $Ia \subseteq Ib$ Dacă $a, b \in K(\mathbb{R})$ și $a \subseteq b$, atunci $\text{int}(a) \subseteq \text{int}(b)$
Dem.	Hp. $x, u, \wedge \mathbb{Q} . u < x < \wedge . (> u . < \wedge$ (1) :		Fie $x \in \text{int}(a)$.
	$\supset a) : \supset . \supset > u . \supset < v : \supset b$ Hp. $x \in Ia : \supset : x \in Ib$		Din definiția interiorului, există $u, v \in \mathbb{R}$ cu $u < x < v$ astfel încât $(u, v) \subseteq a$. Din ipoteza $a \subseteq b$, rezultă $(u, v) \subseteq b$. Prin definiția interiorului aplicată lui b, avem $x \in \text{int}(b)$. Prin urmare: $\text{int}(a) \subseteq \text{int}(b)$
10.	$a, b \in K \mathbb{Q} : \supset : I(ab) \supset Ia$		Interiorul intersecției este inclus în interiorul fiecărei mulțimi $\text{int}(a \cap b) \subseteq \text{int}(a)$
Dem.	$(ab, a)[a, b] P9 . = . P10$		Din $ab \subseteq a$ și monotonia interiorului (P9): $\text{int}(ab) \subseteq \text{int}(a)$. Similar, din $ab \subseteq b$: $\text{int}(ab) \subseteq \text{int}(b)$. Prin urmare $\text{int}(ab) \subseteq \text{int}(a) \cap \text{int}(b)$.
11.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset . I(ab) \supset (Ia)(Ib)$		Interiorul intersecției este inclus în intersecția interioarelor $\text{int}(a \cap b) \subseteq \text{int}(a) \cap \text{int}(b)$
Dem.	$P11 = : P10 . \cap . (b, a)[a, b] P10$		Din P10: $\text{int}(a \cap b) \subseteq \text{int}(a)$. Aplicând P10 cu (b, a) în loc de (a, b): $\text{int}(a \cap b) \subseteq \text{int}(b)$. Prin urmare $\text{int}(a \cap b) \subseteq \text{int}(a) \cap \text{int}(b)$.



12.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset . Ia \supset I(a \cup b)$		Interiorul este inclus în interiorul reuniunii $\text{int}(a) \subseteq \text{int}(a \cup b)$
13.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset . Ia \cup Ib \supset I(a \cup b)$		Reuniunea interioarelor este inclusă în interiorul reuniunii $\text{int}(a) \cup \text{int}(b) \subseteq \text{int}(a \cup b)$
14.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset . I(ab) = (Ia)(Ib)$		Interiorul intersecției egal cu intersecția interioarelor $\text{int}(a \cap b) = \text{int}(a) \cap \text{int}(b)$ Pentru $a, b \in K(\mathbb{Q})$ $\text{int}(a \cap b) = \text{int}(a) \cap \text{int}(b)$
Dem.	Hp. P11 : $\supset . I(ab) \supset (Ia)(Ib)$	(1)	Prima incluziune:
	Hp. $x \in \mathbb{Q} . u, v \in$	(2)	Din teorema 11: $\text{int}(a \cap b) \subseteq \text{int}(a) \cap \text{int}(b)$
	$\mathbb{Q} . u < x < \wedge . (\exists > u . \exists < v : \supset a) . u' , v' \in$ $\mathbb{Q} . u' < x < v' . (\exists > u' . < v' : \supset b) . u'' =$ $M(u \cup u') . v'' = W(v, v') : \supset : u'' , v'' \in$ $\mathbb{Q} . u'' < x < v'' . (\exists > u'' . > v'' : \supset : ab)$		A doua incluziune: Fie $x \in \text{int}(a) \cap \text{int}(b)$. Din $x \in \text{int}(a)$ există $u, v \in \mathbb{Q}$ cu $u < x < v$ și $(u, v) \subseteq a$.
	Hp. $x \in Ia . x \in Ib . (2) : \supset . x \in I(ab)$	(3)	Din $x \in \text{int}(b)$ există $u', v' \in \mathbb{Q}$ cu $u' < x < v'$ și $(u', v') \subseteq b$.
	Hp. (3) : $\supset : (Ia)(Ib) \supset I(ab)$	(4)	
	Hp. (1).(4) : $\supset . Ts.$		Se definește $u'' = \max(u, u')$ și $v'' = \min(v, v')$. Atunci $u'' < x < v''$ (întrucât $u < x < v$ și $u' < x < v'$). Intervalul $(u'', v'') \subseteq (u, v) \cap (u', v') \subseteq a \cap b$. Prin definiția interiorului, $x \in \text{int}(a \cap b)$. Prin urmare: $\text{int}(a) \cap \text{int}(b) \subseteq \text{int}(a \cap b)$ Din (1) și (9): $\text{int}(a \cap b) = \text{int}(a) \cap \text{int}(b)$



15.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . Ea \supset \neg a$		Exteriorul este inclus în complementara mulțimii $\text{ext}(a) \subseteq a^c$
Dem.	$P15 = (-a)[a] P7$		Se aplică Teorema 7 la complementara lui a. Din teorema 7 se știe că $\text{int}(a) \subseteq a$. Aplicându-se această proprietate la a^c (complementara lui a): $\text{int}(a^c) \subseteq a^c$. Prin definiție, $\text{ext}(a) = \text{int}(a^c)$ deci $\text{ext}(a) \subseteq a^c$.
16.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset \therefore Ia . Ea := \wedge$		Interiorul și exteriorul sunt disjuncte $\text{int}(a) \cap \text{ext}(a) = \emptyset$
Dem.	Hp. $P7 . P15 : \supset \therefore Ia . Ea : \supset : a - a := \wedge$		Se folosesc proprietățile de incluziune pentru a arăta că intersecția este vidă. Din $P7$: $\text{int}(a) \subseteq a$. Din $P15$: $\text{ext}(a) \subseteq \neg a$. Prin urmare $\text{int}(a) \cap \text{ext}(a) \subseteq a \cap (a^c) = \emptyset$.
17.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . I Ea = Ea$		Interiorul exteriorului este exteriorul $\text{int}(\text{ext}(a)) = \text{ext}(a)$
Dem.	$P17 = (-a)[a] P8$		Se aplică idempotența interiorului la complementara lui a. $\text{ext}(a) = \text{int}(a^c)$ Aplicând Teorema 8 la $\neg a$: $\text{int}(\text{int}(a^c)) = \text{int}(a^c)$. $\text{int}(\text{ext}(a)) = \text{ext}(a)$.
18.	$a, b \in K \mathbb{Q} . b \supset a : \supset . Ea \supset Eb$		Antimonotonia exteriorului: Dacă $b \subseteq a$, atunci $Ea \subseteq Eb$
Dem.	$P18 = (-a, -b)[a, b] P9$		Se aplică monotonia interiorului la complementare. Dacă $b \subseteq a$, atunci $a^c \subseteq b^c$. Din mono-



			tonia interiorului (P9): $\text{int}(a^c) \subseteq \text{int}(b^c)$. $\text{ext}(a) \subseteq \text{ext}(b)$.
19.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset : Ea \cup Eb . \supset E(ab)$		Reuniunea exterioarele este inclusă în exteriorul intersecției: $\text{ext}(a) \cup \text{ext}(b) \subseteq \text{ext}(a \cap b)$
20.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset . E(a \cup b) = (Ea)(Eb)$		Exteriorul reuniunii egal cu intersecția exterioarele: $\text{ext}(a \cup b) = \text{ext}(a) \cap \text{ext}(b)$
Dem.	$P20 = (-a, -b)[a, b] P14$		Se aplică formula interiorului intersecției la complementare. $\text{ext}(a \cup b) = \text{int}((a \cup b)^c) = \text{int}(a^c \cap b^c)$. Din P14: $\text{int}(a^c \cap b^c) = \text{int}(a^c) \cap \text{int}(b^c) = \text{ext}(a) \cap \text{ext}(b)$.
21.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . L(-a) = Lb$		Limita complementarei este limita originalului $\partial(a^c) = \partial a$
22.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset \therefore Ia . Lb := \wedge$ $\supset \therefore Ea . Lb := \wedge$ $\supset \therefore -Ia . -Ea . -Lb := \wedge$		Interior, exterior și limita sunt mutual disjuncte $\text{int}(a) \text{ ext}(a) \partial a$ sunt disjuncte
Dem.	$P22 = P3$		Se bazează pe axioma descompunerii spațiului. Prin definiție, $\partial a = \mathbb{Q} \setminus (\text{int}(a) \cup \text{ext}(a))$. Prin urmare, $\text{int}(a) \text{ ext}(a)$ și ∂a sunt disjuncte două câte două și reuniunea lor este $\mathbb{Q}$.
23.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset : a \supset . Ia \cup Lb$		Mulțimea este inclusă în reuniunea interiorului și limitei: $a \subseteq \text{int}(a) \cup \partial a$



24.	$a \in K(Q) \cap I(a \cap Lb) = \bigwedge$		Interiorul intersecției cu limita este vid: $\text{int}(a \cap \partial a) = \emptyset$
Dem.	Hp. P14 . P7 . P22 : $\cap : I(a \cap Lb) = \bigwedge$ $Ia \cap Lb \cap Ia \cap Lb = \bigwedge$		din p14: $\text{int}(a \cap \partial a) = \text{int}(a) \cap \text{int}(\partial a)$. din p7: $\text{int}(\partial a) \subseteq \partial a$. din p22: $\text{int}(a) \cap \partial a = \emptyset$. prin urmare $\text{int}(a) \cap \text{int}(\partial a) = \emptyset$, deci $\text{int}(a \cap \partial a) = \emptyset$.
25.	$a, b \in K(Q) \cap a \supset b : \cap : Lb \cap Ib \cup Lb$		Proprietate de monotonie pentru limită: Dacă $a \subseteq b$, atunci $La \subseteq Ib \cup Lb$ Dacă $a, b \in K(Q)$ și $a \subseteq b$, atunci $\partial a \subseteq \text{int}(b) \cup \partial b$
Dem.	Hp. P18 : $\cap : Eb \supset Ea : \cap : Ia \cup Lb \cap Ib \cup Lb : \cap : Ts$.		Din antimonotonia exteriorului (Teorema 18): dacă $a \subseteq b$, atunci $\text{ext}(b) \subseteq \text{ext}(a)$. Știm că $Q = \text{int}(a) \cup \partial a \cup \text{ext}(a) = \text{int}(b) \cup \partial b \cup \text{ext}(b)$ (descompunerea spațiului). Din $a \subseteq b$ și monotonie interiorului: $\text{int}(a) \subseteq \text{int}(b)$. Din (1): $\text{ext}(b) \subseteq \text{ext}(a)$ deci $\text{int}(a) \cup \partial a \subseteq \text{int}(b) \cup \partial b$. Combinând cu (3) rezultă $\partial a \subseteq \text{int}(b) \cup \partial b$
26.	$a, b \in K(Q) \cap : L(ab) \cap Ia \cap Lb \cup Ib \cap Lb \cup Lb \cap Lb$		Limita intersecției: $\partial(A \cap B) \subseteq (\text{int}(A) \cap \partial B) \cup (\text{int}(B) \cap \partial A) \cup (\partial A \cap \partial B)$ Pentru $a, b \in K(Q)$ avem $\partial(a \cap b) \subseteq (\text{int}(a) \cap \partial b) \cup (\text{int}(b) \cap \partial a) \cup (\partial a \cap \partial b)$
Dem.	Hp. $\cap : ab \supset a \cap ab \supset b$. P25		Din $a \cap b \subseteq a$ și $a \cap b \subseteq b$, aplicând Teorema 25:
	$\cap : L(ab) \cap Ia \cup Lb \cap L(ab) \cap Ib \cup Lb : \cap : L(ab) \cap (Ia \cup Lb) \cap (Ib \cup Lb) . L(ab) \cap (Ia \cap Ib) = L(ab) \cap I(ab) =$		$\partial(a \cap b) \subseteq \text{int}(a) \cup \partial a$ $\partial(a \cap b) \subseteq \text{int}(b) \cup \partial b$



	$\wedge :$		
	$\supset: Ts.$		Prin urmare: $\partial(a \cap b) \subseteq (\text{int}(a) \cup \partial a) \cap (\text{int}(b) \cup \partial b)$ Dezvoltând intersecția: $\partial(a \cap b) \subseteq (\text{int}(a) \cap \text{int}(b)) \cup (\text{int}(a) \cap \partial b) \cup (\partial a \cap \text{int}(b)) \cup (\partial a \cap \partial b)$ Din teorema 24, $\text{int}(a \cap b) \cap \partial(a \cap b) = \emptyset$, iar Din teorema 14, $\text{int}(a \cap b) = \text{int}(a) \cap \text{int}(b)$. Prin urmare, primul termen se anulează cu o parte din $\partial(a \cap b)$. Rezultă: $\partial(a \cap b) \subseteq (\text{int}(a) \cap \partial b) \cup (\text{int}(b) \cap \partial a) \cup (\partial a \cap \partial b)$
26'.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset . L(ab) \supset Lb \cup Lb$		Limita intersecției inclusă în reuniunea limitelor $\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B$
27.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset: L(a \cup b) = Lb Eb \cup Lb Ea \cup Lb Lb$		Limita reuniunii: $\partial(A \cup B) = (\partial A \cap \text{ext}(B)) \cup (\partial B \cap \text{ext}(A)) \cup (\partial A \cap \partial B)$
Dem.	$P27 = (-a, -b)[a, b] P26$		
27'.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset: L(a \cup b) \supset Lb \cup Lb$		Limita reuniunii inclusă în reuniunea limitelor $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$
28.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . L Ia \supset Lb$		Limita interiorului inclusă în limită: $\partial(\text{int}(a)) \subseteq \partial a$
Dem.	Hp. P7 : $\supset: Ia \supset a . P25$	(1)	Din P7: $\text{int}(a) \subseteq a$
	: $\supset: L Ia \supset Ia \cup Lb$		Din P25 (monotonia limitei): $\partial(\text{int}(a)) \subseteq \text{int}(a) \cup \partial a$
	Hp. P8 . P22	(2)	Din P8 (idempotența): $\text{int}(a) = \text{int}(\text{int}(a))$
	: $\supset . L Ia Ia = L Ia I Ia = \wedge$		Din P22 (disjuncția regiunilor): $\partial(\text{int}(a)) \cap \text{int}(a) = \partial(\text{int}(a)) \cap \text{int}(\text{int}(a)) = \emptyset$
	(1)(2). $\supset . Theor.$		Din (2) și (4): $\partial(\text{int}(a)) \subseteq \partial a$



28'.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset L E a \supset L b$		Limita exteriorului inclusă în limită: $\partial(\text{ext}(a)) \subseteq \partial a$
29.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . L L b \supset L I a \cup L E a$		Limita limitei inclusă în reuniunea limitelor interiorului și exteriorului: $\partial(\partial a) \subseteq \partial(\text{int}(a)) \cup \partial(\text{ext}(a))$
Dem.	Hp. $\supset: L L b = L (I a \cup E a)$. P27' : $\supset .$ Ts.		$\partial a = \mathbb{Q} \setminus (\text{int}(a) \cup \text{ext}(a))$ deci $\partial(\partial a) = \partial(\mathbb{Q} \setminus (\text{int}(a) \cup \text{ext}(a)))$ Prin proprietăți generale: $\partial(\partial a) \subseteq \partial(\text{int}(a)) \cup \partial(\text{ext}(a))$
29'.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . L L b \supset L b$		limita limitei inclusă în limită: $\partial(\partial a) \subseteq \partial a$
Dem.	P29 . P28 . P28' : $\supset .$ Theor.		Din T29: $\partial(\partial a) \subseteq \partial(\text{int}(a)) \cup \partial(\text{ext}(a))$. Din T28: $\partial(\text{int}(a)) \subseteq \partial a$. Din T28' (pentru exterior): $\partial(\text{ext}(a)) \subseteq \partial a$. Prin urmare $\partial(\partial a) \subseteq \partial a$.
30.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . L b = I L b \cup L L b$		Limita este reuniunea interiorului limitei și limita limitei: $\partial a = \text{int}(\partial a) \cup \partial(\partial a)$ pentru $a \in k(\mathbb{Q})$ avem $\partial a = \text{int}(\partial a) \cup \partial(\partial a)$
Dem.	Hp. P23 : $\supset . L b \supset I L b \cup L L b$	(1)	Prima incluziune: Din teorema 23 (descompunerea spațiului) $\partial a \subseteq \text{int}(\partial a) \cup \partial(\partial a)$.
	Hp. P7 : $\supset . I L b \supset L b$	(2)	
	Hp. P29' : $\supset . L L b \supset L b$	(3)	
	(1)(2)(3). $\supset .$ Theor.		A doua incluziune: Din teorema 7, $\text{int}(\partial a) \subseteq \partial a$. Din teorema 29', $\partial(\partial a) \subseteq \partial a$. Prin urmare: $\text{int}(\partial a) \cup \partial(\partial a) \subseteq \partial a$ Din (1) și (4): $\partial a = \text{int}(\partial a) \cup \partial(\partial a)$
31	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . L I L b \supset L L b$		Limita interiorului limitei inclusă în limita limitei:



			$\partial(\text{int}(\partial a)) \subseteq \partial(\partial a)$
Dem.	$P31 = (Lb)[a] \text{ P28}$		Din T28 aplicat la ∂a : $\partial(\text{int}(\partial a)) \subseteq \partial(\partial a)$. Aceasta este exact teorema 31.
32.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . I L L b = \wedge$		Interiorul limitei limitei este vid: $\text{int}(\partial(\partial a)) = \emptyset$
Dem.	Hp. P29' : $\supset : L L b = L b L L b . (L b)[a]$		Din P29', $\partial(\partial a) \subseteq \partial a$, combinat cu P24 aplicat la ∂a în loc de a .
	$P24 : \supset Ts.$		
33.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset : I L I L b = \wedge$		Interiorul limitei interiorului limitei este vid: $\text{int}(\partial(\text{int}(\partial a))) = \emptyset$
Dem.	$P31 . P32 : \supset . P33$		Rezultă din T31 și T32 prin proprietatea vidului.
34.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . L L L b = L L b$		Limita limitei limitei este limita limitei: $\partial(\partial(\partial a)) = \partial(\partial a)$
Dem.	$(Lb)[a] \text{ P30 / P P32 : } \supset . \text{Theor.}$		Din T30 aplicat la ∂a , combinat cu T32.
35.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset . I a L b \supset L (ab)$		Intersecția interiorului cu limita inclusă în limita intersecției: $\text{int}(a) \cap \partial b \subseteq \partial(a \cap b)$
Dem.	Hp. P14	(1)	Din teorema 14: $\text{int}(a \cap b) = \text{int}(a) \cap \text{int}(b)$.
	$: \supset . I a L b I (ab) = I a I b L b = \wedge$		Prin urmare: $\text{int}(a) \cap \partial b \cap \text{int}(a \cap b) = \text{int}(a) \cap \partial b \cap \text{int}(a) \cap \text{int}(b) = \text{int}(a) \cap \text{int}(b) \cap \partial b$
	Hp. P2 . P14	(2)	Din proprietățile limitei: $\text{int}(b) \cap \partial b = \emptyset$, deci expresia de mai sus este vidă.
	$: \supset . I a L b E (ab) = I a L b I (- a \cup - b) =$ $I (a - b) L b = I a E b L b = \wedge$		Rezultă prin urmare că $\text{int}(a) \cap \partial b \subseteq \partial(a \cap b)$.
	$(1)(2) \supset \text{Theor.}$		
36.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset . I a L b \cup I b L b \supset L b b.$	(Vide P26)	Reuniunea intersecțiilor incluse în limita intersecției: $(\text{int}(a) \cap \partial b) \cup (\text{int}(b) \cap \partial a) \subseteq \partial(a \cap b)$



Dem.	$P36 = : P35 .(b, a)[a, b] P35$		Se aplică Teorema 35 de două ori - o dată cu (a, b) și o dată cu (b, a) : Din P35: $\text{int}(a) \cap \partial b \subseteq \partial(a \cap b)$ Aplicând P35 cu rolurile inversate: $\text{int}(b) \cap \partial a \subseteq \partial(a \cap b)$ Prin reuniunea acestor două incluziuni: $(\text{int}(a) \cap \partial b) \cup (\text{int}(b) \cap \partial a) \subseteq \partial(a \cap b)$
37.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset . Ea Lb \cup Eb Lb \cup L(a \cup b)$	(Vide P27)	Tot așa și pentru reuniune: $(\text{ext}(a) \cap \partial b) \cup (\text{ext}(b) \cap \partial a) \subseteq \partial(a \cup b)$
Dem.	$P37 = (-a, -b)[a, b] P36$		Se aplică Teorema 36 la complementarele -a și -b: $(\text{int}(-a) \cap \partial(-b)) \cup (\text{int}(-b) \cap \partial(-a)) \subseteq \partial((-a) \cap (-b))$ Folosind definițiile: $\text{int}(-a) = \text{ext}(a)$ $\partial(-b) = \partial b$ și $(-a) \cap (-b) = -(a \cup b)$: $(\text{ext}(a) \cap \partial b) \cup (\text{ext}(b) \cap \partial a) \subseteq \partial(-(a \cup b)) = \partial(a \cup b)$
38.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset . I(a \cup b) \supset Ia \cup Ib \cup Lb Lb$	(Vide P13)	Interiorul reuniunii: $\text{int}(a \cup b) \subseteq \text{int}(a) \cup \text{int}(b) \cup (\partial a \cap \partial b)$ Pentru $a, b \in K(\mathbb{Q})$ avem $\text{int}(a \cup b) \subseteq \text{int}(a) \cup \text{int}(b) \cup (\partial a \cap \partial b)$
Dem.	Hp.	(1)	Știm că $\mathbb{Q} = (\text{int}(a) \cup \partial a \cup \text{ext}(a))$ pentru orice mulțime a.
	$\supset . I(a \cup b) \supset (Ia \cup Lb \cup Ea)(Ib \cup Lb \cup Eb)$		
	Hp. P20 . P16	(2)	Prin urmare: $\text{int}(a \cup b) \subseteq (\text{int}(a) \cup \partial a \cup \text{ext}(a)) \cap (\text{int}(b) \cup \partial b \cup \text{ext}(b))$
	$: \supset . I(a \cup b) Ea Eb = I(a \cup b) E(a \cup b) = \wedge$		Din teorema 20: $\text{ext}(a \cup b) = \text{ext}(a) \cap \text{ext}(b)$
	Hp. P37: $\supset : I(a \cup b) (Ea Lb \cup Eb Lb) . \supset . I(a \cup b) L(a \cup b) . = \wedge$	(3)	
	(1)(2)(3). $\supset . \text{Theor.}$		Din teorema 16: $\text{int}(a \cup b) \cap \text{ext}(a \cup b) = \emptyset$, deci $\text{int}(a \cup b) \cap \text{ext}(a) \cap \text{ext}(b) = \emptyset$ Din teorema 37 și proprietățile limitei reuniunii: $\text{int}(a \cup b) \cap (\text{ext}(a) \cap \partial b \cup \text{ext}(b) \cap \partial a) = \emptyset$



			Eliminând termenii care se anulează din dezvoltarea produsului, rămâne: $\text{int}(a \cup b) \subseteq \text{int}(a) \cup \text{int}(b) \cup (\partial a \cap \partial b)$
38'.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset . E (ab) \supset E a \cup E b \cup L b L b$	(Vide P19)	Exteriorul intersecției: $\text{ext}(A \cap B) \subseteq \text{ext}(A) \cup \text{ext}(B) \cup (\partial A \cap \partial B)$
39.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . I L b L I a = \wedge$		Intersecția interiorului limitei cu limita interiorului este vidă: $\text{int}(\partial a) \cap \partial(\text{int}(a)) = \emptyset$
Dem.	Hp. P36 : $\supset : I L b L I a \supset L (L b I a) = \wedge$		Din teorema 36 aplicată la ∂a și $\text{int}(a)$: $\text{int}(\partial a) \cap \partial(\text{int}(a)) \subseteq \partial(\partial a \cap \text{int}(a))$ Din teorema 24: $\partial a \cap \text{int}(a) = \emptyset$, prin urmare $\partial(\partial a \cap \text{int}(a)) = \partial(\emptyset) = \emptyset$. Rezultă: $\text{int}(\partial a) \cap \partial(\text{int}(a)) = \emptyset$
40.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . L I a \supset L L b$		Limita interiorului inclusă în limita limitei: $\partial(\text{int}(A)) \subseteq \partial(\partial A)$
Dem.	Hp. P28 . P30 . P39 : $\supset$ Theor.		Din teorema 28: $\partial(\text{int}(a)) \subseteq \partial a$ Din teorema 30: $\partial a = \text{int}(\partial a) \cup \partial(\partial a)$ Din teorema 39: $\text{int}(\partial a) \cap \partial(\text{int}(a)) = \emptyset$ Prin urmare: $\partial(\text{int}(a)) \subseteq \partial a$ și $\partial(\text{int}(a)) \perp \text{int}(\partial a)$ Rezultă: $\partial(\text{int}(a)) \subseteq \partial(\partial a)$
40'.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . L E a \supset L L b$		Limita exteriorului inclusă în limita limitei: $\partial(\text{ext}(a)) \subseteq \partial(\partial a)$
41.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset L L b = L I a \cup L E a$		Limita limitei este reuniunea limitelor interiorului și exteriorului: $\partial(\partial a) = \partial(\text{int}(a)) \cup \partial(\text{ext}(a))$
Dem.	P29 . P40 . P40' : $\supset$. Theor.		Din teorema 29: $\partial(\partial a) \subseteq \partial(\text{int}(a)) \cup \partial(\text{ext}(a))$ Din teorema 40: $\partial(\text{int}(a)) \subseteq \partial(\partial a)$ Din analog pentru exterior (P40'): $\partial(\text{ext}(a)) \subseteq \partial(\partial a)$



			Rezultă egalitatea: $\partial(\partial a) = \partial(\text{int}(a)) \cup \partial(\text{ext}(a))$
42.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . I L I a = \wedge$ $\supset . I L E a = \wedge$ $\supset . L L I a = L I a$ $\supset . L L E a = L E a$		Mai multe proprietăți ale limitelor ite- rate. Proprietăți complexe ale operatorilor compuși.
43.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset . I (I a \cup I b) = I a \cup I b$		Interiorul reuniunii interioarelor: $\text{int}(\text{int}(a) \cup \text{int}(b)) = \text{int}(a) \cup \text{int}(b)$ Pentru $a, b \in K(\mathbb{Q})$ avem $\text{int}(\text{int}(a) \cup \text{int}(b)) = \text{int}(a) \cup \text{int}(b)$
Dem.	Hp. P7 : $\supset . I (I a \cup I b) \supset I a \cup I b$	(1)	Prima incluziune: Din teorema 7, $\text{int}(\text{int}(a) \cup \text{int}(b)) \subseteq \text{int}(a) \cup \text{int}(b)$ A doua incluziune: Din teorema 8: $\text{int}(a) = \text{int}(\text{int}(a))$ și $\text{int}(b) = \text{int}(\text{int}(b))$ Din teorema 13 (interiorul reuniunii): $\text{int}(a) \cup \text{int}(b) = \text{int}(\text{int}(a)) \cup \text{int}(\text{int}(b)) \subseteq \text{int}(\text{int}(a) \cup \text{int}(b))$ Din (1) și (2): $\text{int}(\text{int}(a) \cup \text{int}(b)) = \text{int}(a) \cup \text{int}(b)$
	Hp. P8 . P13	(2)	
	: $\supset : I a \cup I b . = . I I a \cup I I b . \supset . I (I a \cup I b)$		
	(1)(2) $\supset$ Theor.		
44.	$a, b \in K \mathbb{Q} . \supset . I (L L b \cup L L b) = \wedge$		Interiorul reuniunii limitelor limitelor este vid: $\text{int}(\partial(\partial a) \cup \partial(\partial b)) = \emptyset$
Dem.	Hp. P38 . P32 . P34	(1)	Din teorema 38: $\text{int}(\partial(\partial a) \cup \partial(\partial b)) \subseteq \text{int}(\partial(\partial a)) \cup \text{int}(\partial(\partial b)) \cup (\partial(\partial(\partial a)) \cap \partial(\partial(\partial b)))$ Din teorema 32: $\text{int}(\partial(\partial a)) = \emptyset$ Din teorema 34: $\partial(\partial(\partial a)) = \partial(\partial a)$ Prin urmare: $\text{int}(\partial(\partial a) \cup \partial(\partial b)) \subseteq \emptyset \cup \emptyset \cup (\partial(\partial a) \cap \partial(\partial b)) \subseteq \partial(\partial a)$ Prin simetrie și Teorema 8: $\text{int}(\partial(\partial a) \cup \partial(\partial b)) = \emptyset$
	: $\supset . I (L L b \cup L L b) \supset L L b L L b \supset L L b$		
	Hp. (1). P8		
	: $\supset . I (L L b \cup L L b) \cup I L L b = \wedge$		
45.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . I (I a \cup E a) = I a \cup E a$		Interiorul reuniunii interiorului și exte- riorului:



			$\text{int}(\text{int}(a) \cup \text{ext}(a)) = \text{int}(a) \cup \text{ext}(a)$
Dem.	$P8 . P17 . (-a)[b] P43 : \supset . \text{Theor.}$		Din teorema 8: $\text{int}(a) = \text{int}(\text{int}(a))$ Din teorema 17: $\text{ext}(a) = \text{int}(\text{ext}(a))$ Din teorema 43 aplicată la $\text{int}(a)$ și $\text{ext}(a)$: $\text{int}(\text{int}(a) \cup \text{ext}(a)) = \text{int}(a) \cup \text{ext}(a)$ Prin proprietatea că $\text{int}(a)$ și $\text{ext}(a)$ sunt deja „interioare” în sensul că sunt egale cu propriile lor interioare.
45’.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . E Lb = Ia \cup Ea$		Exteriorul limitei: $\text{ext}(\partial a) = \text{int}(a) \cup \text{ext}(a)$
46.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . E Ia = -(Ia \cup L Ia)$		Exteriorul interiorului: $\text{ext}(\text{int}(a)) = (\text{int}(a) \cup \partial(\text{int}(a)))^c$
46’.	$a \in K \mathbb{Q} . \supset . EEa = -(Ea \cup L Ea)$		Exteriorul exteriorului: $\text{ext}(\text{ext}(a)) = (\text{ext}(a) \cup \partial(\text{ext}(a)))^c$

Și atât.

Concluziile le puteți trage domniile voastre, așa precum probabil și-ar fi dorit și domnul Peano, care în exact această „abruptă” manieră și-a finalizat propria lucrare.

Șchiop Nicolae Cristian
Bacău 24 09 2025